

Capitolul 1

Modulul 3: Calibrarea geometrică a camerei

2CAPITOLUL 1. MODULUL 3: CALIBRAREA GEOMETRICĂ A CAMEREI

Cuprins

1	Modulul 3: Calibrarea geometrică a camerei	1
1.1	Introducere model geometric al camerei	3
1.1.1	Proiecția de perspectivă	4
1.1.2	Proiecția afină	7
1.2	Parametrii intrinseci și extrinseci	8
1.2.1	Sisteme de coordonate	8
1.2.2	Transformarea sistemului de coordonate	11
1.2.3	Parametrii geometrice ai camerei	18
1.3	Calibrarea geometrică a camerei	24
1.3.1	Estimarea parametrilor din perspectiva metodei celor mai mici pătrate	25
1.3.2	O abordare liniară a problemei calibrării camerei	35
1.3.3	Calibrarea camerei luând în calcul distorsiunile radiale	38
1.3.4	Exemplu practic de metodă de calibrare	43

1.1 Introducere model geometric al camerei

Modul de formare al unei imagini optice într-un dispozitiv specific de captare a informației vizuale, și aici ne referim atât la dispozitivele artificiale electronice ("imaging devices") cât și la cele biologice (ochiul uman), este bazat pe captarea și focalizarea razelor de lumină. Astfel, imaginea optică percepută nu este altceva decât o proiecție a lumii înconjurătoare, infinită spațial și spectral, pe o suprafață limitată. Suprafața de proiecție poate diferi de la dispozitiv la dispozitiv. De exemplu, o cameră foto va proiecta lumina pe fiecare unitate spațială a unui plan (formând ceea ce numim pixeli sau "picture elements"), retina umană este mai aproape de o formă sferică, camerele foto panoramice folosesc o suprafață de proiecție cilindrică, și așa mai departe. Scopul acestui capitol este acela de a aduce în discuție problema modelării geometrice a modului de formare al unei imagini. În acest sens vom porni expunerea de la un model simplu și anume cel al "pinhole

camera", model care stă la baza evoluției tuturor dispozitivelor de captare actuale. Informațiile prezentate în acest capitol urmăresc modul de expunere al acestora din [1].

1.1.1 Proiecția de perspectivă

Un model simplu al geometriei imaginii ce oferă totuși o serie de avantaje din perspectiva modelului matematic asociat, este cel al "pinhole camera". În ciuda ipotezelor restrânse, acest model se dovedește a fi o aproximare acceptabilă în multe dintre aplicațiile specifice.

Modelul poate fi descris astfel: având la dispoziție o cutie închisă, folosim un ac pentru a perfora un orificiu mic în centrul uneia dintre suprafețele acesteia, iar pe suprafața opusă în interior poziționăm o placă translucidă¹. Dacă într-o cameră întunecată poziționăm în fața orificiului cutiei o sursă de lumină, vom observa faptul că pe placa translucidă se va proiecta o imagine răsturnată. Procesul este ilustrat în Figura 1.1 și poartă numele de *proiecție de perspectivă*.

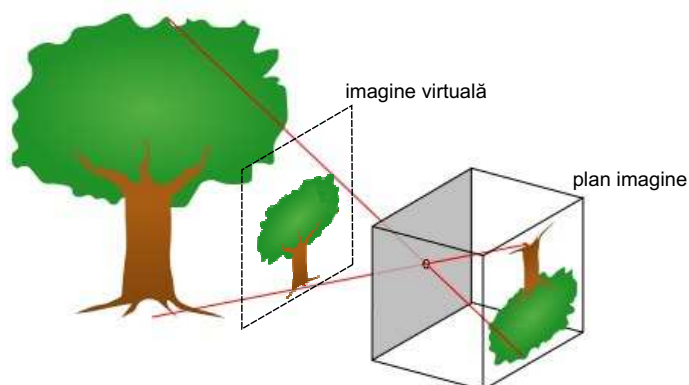


Figura 1.1: Modelul "pinhole camera" (sursă imagine Wikipedia).

Dacă orificiul este redus la un punct (caz ipotetic), atunci fiecare punct din planul imaginii va fi generat de o singură rază de lumină. Cum orificiul are în realitate o dimensiune finită, dar totuși foarte redusă, fiecare punct din planul imaginii va fi în realitate obținut prin proiecția unui con de raze. Mai

¹translucid se referă la un material parțial transparent, ce poate fi străbătut de un fascicul de lumină pe care îl împrăștie parțial, astfel încât, privind corpul sau mediul respectiv nu pot fi distinse contururile sau detaliile obiectelor aflate de partea opusă (definiție Dictionarul Explicativ al Limbii Române).

mult, imaginea creată este răsturnată, astfel că uneori este mai convenabil să fie considerată o imagine virtuală, ce este asociată unui plan ce se află în fața orificiului, la o distanță egală cu cea față de planul imaginii reale. Imaginea virtuală este astfel echivalentă imaginii reale (vezi Figura 1.1).

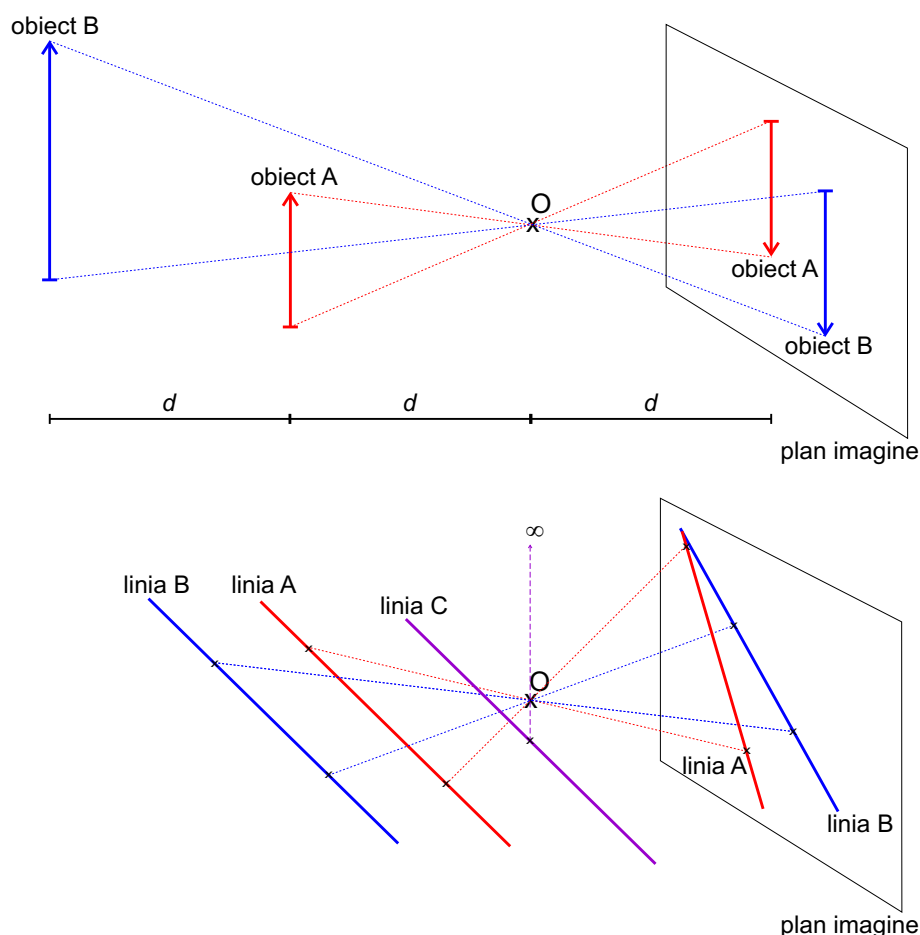


Figura 1.2: Exemple de aberații optice specifice proiecției de perspectivă.

Proiecția de perspectivă, datorită ipotezelor simplificate, conduce la o serie de aberații optice. Una dintre cele mai semnificative dintre acestea este faptul că dimensiunea aparentă a obiectelor depinde de distanță. De exemplu, în Figura 1.2 (imaginea de sus) se observă faptul că două obiecte de dimensiuni diferite (obiectul B este aproximativ de două ori mai mare decât obiectul A), dar aflate la distanțe diferite, sunt proiectate în planul imaginii la dimensiuni similare. Alt efect nedorit este acela că liniile paralele proiectate în planul imaginii par să se intersecteze (vezi imaginea de jos

din Figura 1.2). De asemenea, linia C aflată într-un plan paralel cu planul imaginii ce trece prin O nu poate avea proiecție.

Pentru a determina ecuațiile ce realizează corespondența între coordonatele punctelor fizice la nivelul obiectelor din scenă și proiecțiile acestora în planul imaginii se va lua în considerare sistemul de coordonate definit de cameră. Fie $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sistemul de coordonate atașat orificiului O , unde \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} reprezintă versorii bazei² iar Π reprezintă planul imaginii ales astfel încât să fie perpendicular pe axa definită de \mathbf{k} ³ ce se află la o distanță f de O . De notat faptul că planul Π poartă în general denumirea de *retină* iar linia perpendiculară pe Π ce trece prin orificiul O poartă denumirea de *axă optică*. Punctul A în care aceasta intersectează planul Π poartă numele de *centrul imaginii*. Acesta joacă un rol important în procesul de calibrare putând fi ales drept origine a sistemului de coordonate al imaginii. Notățiile de mai sus sunt ilustrate în Figura 1.3.

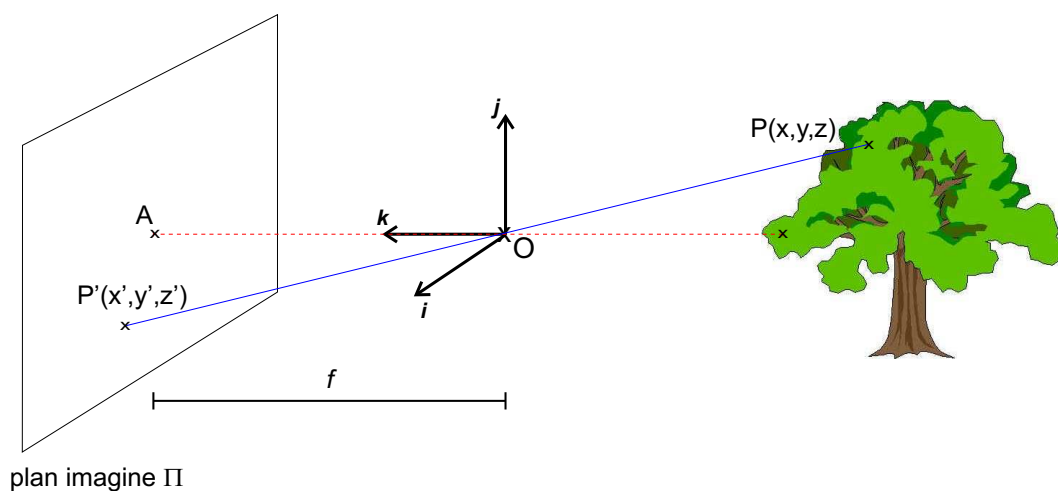


Figura 1.3: Modelul geometric al proiecției de perspectivă.

Dacă notăm cu P un punct din scena reală de coordonate (x, y, z) și P' proiecția acestuia în planul imaginii Π , de coordonate (x', y', z') , datorită coliniarității punctelor P , O și P' putem deduce faptul că $\overrightarrow{OP'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$, unde λ este o constantă oarecare. Astfel, putem deduce mai departe relația dintre proiecțiile pe fiecare axă ca fiind $x' = \lambda \cdot x$, $y' = \lambda \cdot y$ și respectiv

²vectori ortogonali de amplitudine unitară ce definesc de regulă un sistem de coordonate, ca de exemplu sistemul Cartezian.

³pe parcursul întregii lucrări, în cazul în care nu este specificat explicit prin intermediul unei săgeți (exemplu *vector*), vectorii vor fi reprezentați cu litere îngroșate (exemplu \mathbf{k}).

$z' = \lambda \cdot z$. Cu alte cuvinte, raporturile între coordonate sunt constante:

$$\lambda = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} \quad (1.1)$$

Adăugând faptul că $z' = f$, obținem următoarele relații pentru x' și y' :

$$x' = f \cdot \frac{x}{z}, \quad y' = f \cdot \frac{y}{z} \quad (1.2)$$

Aceste ecuații constituie proiecția de perspectivă a coordonatelor punctului P din scena reală în planul imaginii.

1.1.2 Proiecția afină

O altă aproximare a geometriei imaginii o constituie modelele de proiecție afină. Pentru aceasta, pe lângă planul imaginii, Π , vom considera un al doilea plan Π_0 , paralel cu Π , care se află în fața centrului O la distanța z_0 (un număr pozitiv). Procesul este ilustrat în Figura 1.4.

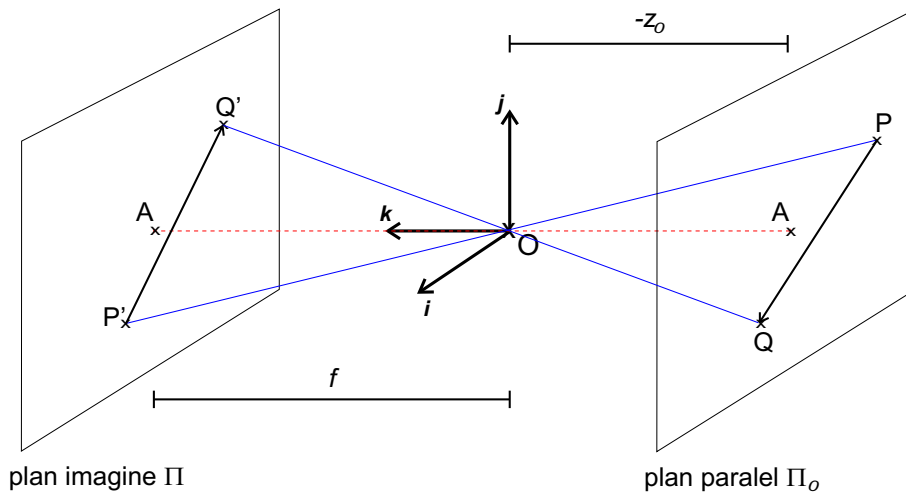


Figura 1.4: Modelul geometric al proiecției afine.

Astfel, dacă reluăm ecuația 1.2, atunci aceasta devine:

$$x' = -f \cdot \frac{x}{z_0}, \quad y' = -f \cdot \frac{y}{z_0} \quad (1.3)$$

unde minusul provine de la faptul că planul Π_0 se află în fața originii sistemului de referință atașat orificiului O , pe axa negativă. Notând cu $m = \frac{f}{z_0}$

factorul de amplificare al sistemului (o valoare pozitivă), atunci putem re-scrie:

$$x' = -m \cdot x, \quad y' = -m \cdot y \quad (1.4)$$

Acest parametru este important pentru a realiza corespondența între dimensiunile reale ale obiectelor din scenă și dimensiunea obiectelor obținută din proiecția acestora în planul imagine. Acest lucru reiese din următorul experiment. Dacă pe lângă punctele P și P' considerăm punctul Q în planul Π_0 și imaginea acestuia Q' în planul imagine Π , vectorii \overrightarrow{PQ} și respectiv $\overrightarrow{P'Q'}$ fiind paraleli, se poate deduce faptul că $|\overrightarrow{P'Q'}| = m \cdot |\overrightarrow{PQ}|$, unde operatorul $|\cdot|$ desemnează norma unui vector. Cu alte cuvinte, dimensiunea segmentului PQ este amplificată în modul cu m în planul imaginii.

Dacă parametrul m este considerat constant, atunci avem de-a face cu un model de *perspectivă slabă* ("weak perspective"), situație ce corespunde în realitate cazului în care adâncimea scenei este mică în comparație cu distanța față de cameră. Dacă prin normalizarea coordonatelor imagini obținem $m = -1$, atunci modelul obținut poartă numele de *proiecție ortografică* și în acest caz $x' = x$ și $y' = y$. Acest lucru semnifică faptul că toate razele de lumină ce proiectează punctele din planul Π_0 în planul imagine Π sunt paralele cu axa versorului \mathbf{k} . Imaginea obținută păstrează dimensiunile obiectelor inițiale. Evident că acest model este nerealistic, dar totuși își găsește aplicație în anumite situații.

1.2 Parametrii intrinseci și extrinseci

Pentru a putea analiza mecanismul de proiecție al figurilor geometrice din scena reală în planul imaginii este nevoie de definirea unui anumit formalism matematic. În cele ce urmează vom introduce o serie de noțiuni de geometrie Euclidiană analitică ce sunt necesare pentru a putea descrie procesul de modelare geometrică a camerelor [1].

1.2.1 Sisteme de coordonate

Dacă dispunem de un anumit punct O din spațiu și considerăm trei vectori unitate, \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} ce sunt fiecare perpendiculari unul pe celălalt, atunci putem defini un sistem ortonormal de coordonate (F) ca fiind cvadruplul $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. În acest caz este evident faptul că punctul O reprezintă originea sistemului iar vectorii \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} reprezintă vectorii bază sau versori (vezi Secțiunea 1.1.1).

Pentru definirea sistemelor de coordonate vom folosi principiul mâinii drepte, astfel că vectorii \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} vor fi considerați a fi atașați degetelor

măinii drepte în ipostaza în care degetul mare indică în sus, degetul arătător arată în față iar degetul din mijloc indică în stânga. Procesul este ilustrat în Figura 1.5. Această convenție conduce la următoarele identități:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (1.5)$$

unde \times denotă produsul vectorial.

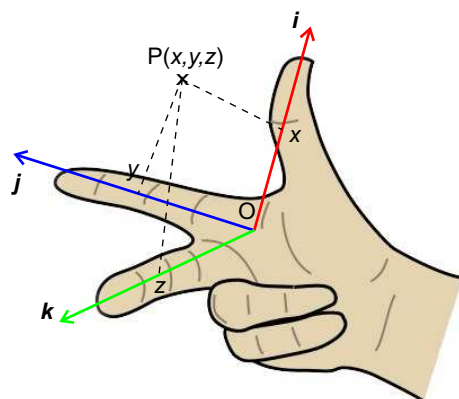


Figura 1.5: Principiul mâinii drepte în definirea sistemelor de coordonate.

Este bine știut faptul că un punct arbitrar P va fi reprezentat în acest sistem de coordonate prin proiecțiile vectorului \overrightarrow{OP} pe cele trei axe, notate de regulă cu x , y și z . Acestea sunt definite astfel:

$$x = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{i}, \quad y = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{j}, \quad z = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{k} \quad (1.6)$$

unde \cdot reprezintă de această dată produsul scalar. Aceste ecuații conduc la scrierea vectorului \overrightarrow{OP} ca sumă de proiecții, astfel:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k} \quad (1.7)$$

Sub formă matriceală, se poate spune că punctul P este definit în sistemul (F) de vectorul de coordonate:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 \quad (1.8)$$

Folosind același raționament, se pot defini coordonatele oricărui vector liber \mathbf{n} în funcție de lungimea proiecțiilor acestuia pe cele trei axe.

Mai departe, vrem să vedem cum se definește un plan în sistemul de coordonate (F). Pentru aceasta considerăm următorul scenariu: fie un plan Π , un punct O din afara planului, un punct arbitrar P conținut de acesta și un vector unitate \mathbf{n} perpendicular pe Π (vezi Figura 1.6). Vectorul \overrightarrow{OH} este perpendicular pe Π și coliniar cu \mathbf{n} . Astfel, punctele P din planul Π vor fi caracterizate de $\overrightarrow{HP} \cdot \mathbf{n} = 0$ (fiind perpendiculare). Dar vectorul \overrightarrow{HP} poate fi scris ca diferența dintre \overrightarrow{OP} și \overrightarrow{OH} ceea ce conduce la $\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} - \overrightarrow{OH} \cdot \mathbf{n} = 0$. Dacă luăm ca referință sistemul de coordonate (F) definit anterior în care x , y și z reprezintă coordonatele punctului P iar cu a , b și c notăm coordonatele vectorului \mathbf{n} , atunci obținem următoarea ecuație:

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d = 0 \quad (1.9)$$

unde $d = \overrightarrow{OH} \cdot \mathbf{n}$ reprezintă distanța de la originea O la planul Π și este independentă de alegerea lui P .

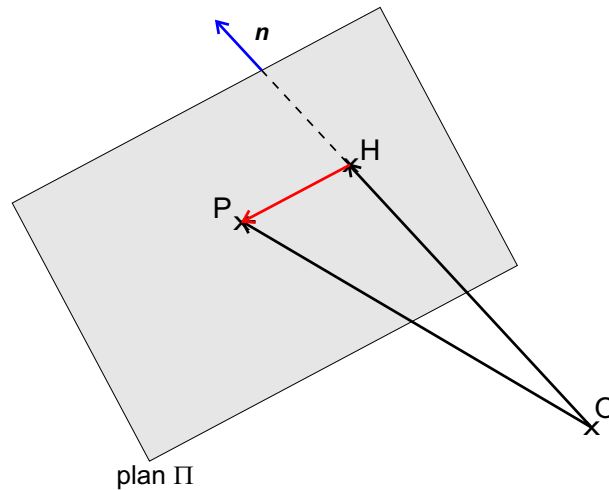


Figura 1.6: Ecuația unui plan într-un sistem de coordonate.

Matriceal acest lucru poate fi scris ca un produs de doi vectori:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & -d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.10)$$

sau mai pe scurt:

$$\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{P} = 0 \quad (1.11)$$

unde $\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ -d \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ iar T reprezintă transpusa unei matrice.

Ecuția 1.11 reprezintă *ecuația planului* Π în sistemul de coordonate (F) unde $(x, y, z, 1)$ reprezintă *coordonatele omogene* ale punctului P iar similar $(a, b, c, -d)$ reprezintă coordonatele omogene ale planului Π . Se observă faptul că reprezentarea în coordonate omogene implică adăugarea unei a patra valori. Avantajul acestei notații va fi ilustrat concret în secțiunile următoare.

Coordonatele omogene pot fi folosite la descrierea unor figuri geometrice mai complexe decât un simplu punct sau plan. Să luăm exemplul unei sfere S de rază r , centrată în originea sistemului. Este bine cunoscut faptul că o condiție necesară și suficientă ca un punct P de coordonate x, y și z să aparțină lui S o reprezintă ecuația $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Ecuția ce descrie această sferă în coordonate omogene se poate scrie ca fiind:

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.12)$$

Dacă generalizăm problema la o suprafață pătratică, definită ca locul geometric al punctelor P al căror coordonate satisfac o ecuație de tipul:

$$a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + 2 \cdot f \cdot y \cdot z + 2 \cdot g \cdot z \cdot x + 2 \cdot h \cdot x \cdot y + 2 \cdot p \cdot x + 2 \cdot q \cdot y + 2 \cdot r \cdot z + d = 0 \quad (1.13)$$

unde $a, b, c, f, g, h, p, q, r$ și d sunt scalari, atunci ecuația acestuia în coordonate omogene poate fi scrisă ca fiind:

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (1.14)$$

unde $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$ iar $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & h & g & p \\ h & b & f & q \\ g & f & c & r \\ p & q & r & d \end{bmatrix}$ este o matrice ce definește supra-

fața. Se observă faptul că aceasta este de dimensiune 4×4 și este simetrică.

1.2.2 Transformarea sistemului de coordonate

În cele ce urmează vom presupune existența mai multor sisteme de referință. În această ipoteză vrem să studiem problema trecerii de la un sistem de

coordonate la altul. Pentru aceasta, vom defini următoarea convenție de notație: fie (F) un sistem de coordonate definit de cvadruplul $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (O este originea sistemului iar \mathbf{i} , \mathbf{j} și \mathbf{k} sunt versorii bazei) și P un punct din spațiu. Prin notația ${}^F P$ se va înțelege reprezentarea lui P în sistemul (F) (se observă faptul că sistemul apare ca superscript în partea stângă), și anume: ${}^F P = \overrightarrow{OP}$ (vezi ecuația 1.7, unde x , y și z reprezintă proiecțiile pe fiecare dintre axe).

Să considerăm în continuare două sisteme de coordonate, $(A) = (O_A, \mathbf{i}_A, \mathbf{j}_A, \mathbf{k}_A)$ și respectiv $(B) = (O_B, \mathbf{i}_B, \mathbf{j}_B, \mathbf{k}_B)$ și punctul P din spațiu. Vrem să reprezentăm ${}^B P$ în sistemul (A) și anume în funcție de ${}^A P$.

Translația. Pentru aceasta să considerăm următoarea ipoteză simplificată: cele două sisteme au axele paralele, și anume $\mathbf{i}_A = \mathbf{i}_B$, $\mathbf{j}_A = \mathbf{j}_B$ și $\mathbf{k}_A = \mathbf{k}_B$ dar $O_A \neq O_B$. Această configurație este ilustrată în Figura 1.7 și poartă numele de *translație pură*.

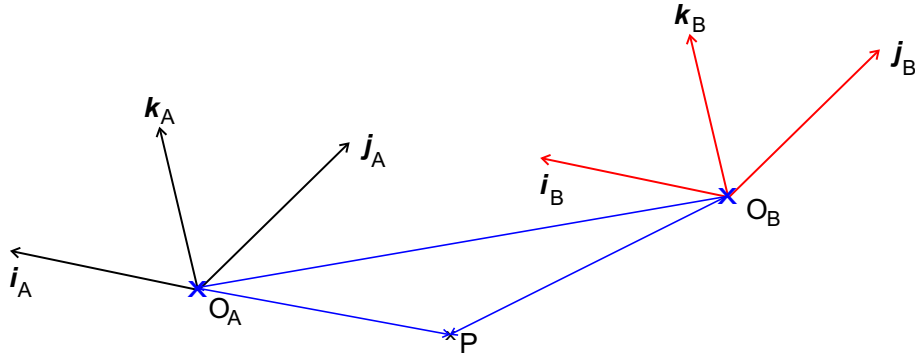


Figura 1.7: Translația sistemului de coordonate.

În acest caz se observă faptul că:

$$\overrightarrow{O_B P} = \overrightarrow{O_A P} + \overrightarrow{O_B O_A} \quad (1.15)$$

și mai departe folosind notația de mai sus obținem:

$${}^B P = {}^A P + {}^B O_A \quad (1.16)$$

cu alte cuvinte, P reprezentat în sistemul de coordonate (B) se scrie ca fiind suma dintre coordonatele lui P reprezentat în sistemul (A) și coordonatele centrului O_A reprezentat în sistemul (B) , rezultat de altfel intuitiv.

Rotația. Dacă revenim asupra ipotezei de axe paralele, și de această dată considerăm originile celor două sisteme ca fiind comune, și anume $O_A = O_B = 0$, atunci obținem o *rotație pură*. Această situație este ilustrată în Figura 1.8.

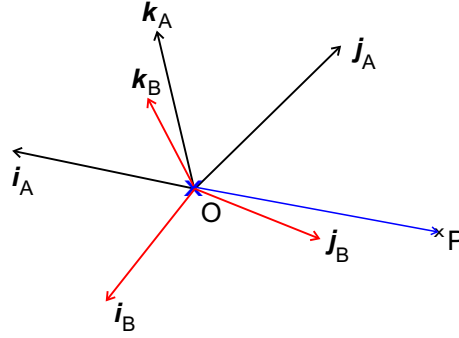


Figura 1.8: Rotația sistemului de coordonate.

În acest caz ecuația 1.16 devine $\overrightarrow{OP} = {}^B P = {}^A P$, ceea ce conduce la următoarea identitate:

$${}^B x \cdot \mathbf{i}_B + {}^B y \cdot \mathbf{j}_B + {}^B z \cdot \mathbf{k}_B = {}^A x \cdot \mathbf{i}_A + {}^A y \cdot \mathbf{j}_A + {}^A z \cdot \mathbf{k}_A \quad (1.17)$$

unde ${}^B x$, ${}^B y$ și ${}^B z$ reprezintă proiecțiile punctului P în sistemul (B) (similar avem proiecțiile în sistemul (A)). Dacă reprezentăm ecuația obținută sub formă matriceală, obținem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_B & \mathbf{j}_B & \mathbf{k}_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^B x \\ {}^B y \\ {}^B z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_A & \mathbf{j}_A & \mathbf{k}_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^A x \\ {}^A y \\ {}^A z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Dacă înmulțim de o parte și de alta în stânga cu vectorul $\begin{bmatrix} \mathbf{i}_B & \mathbf{j}_B & \mathbf{k}_B \end{bmatrix}^T$ obținem următoarea ecuație:

$$\begin{bmatrix} {}^B x \\ {}^B y \\ {}^B z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{i}_A & \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{j}_A & \mathbf{i}_B \cdot \mathbf{k}_A \\ \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{i}_A & \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{j}_A & \mathbf{j}_B \cdot \mathbf{k}_A \\ \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{i}_A & \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{j}_A & \mathbf{k}_B \cdot \mathbf{k}_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^A x \\ {}^A y \\ {}^A z \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

sau prescurtat:

$${}^B P = {}^B R \cdot {}^A P \quad (1.20)$$

unde ${}^B R$ definește matricea rotației sistemului de coordonate (A) astfel încât să se suprapună peste sistemul (B) .

Din modul de definire al lui ${}^B_A R$, se poate observa faptul că fiecare coloană corespunde de fapt reprezentării vectorilor \mathbf{i}_A , \mathbf{j}_A și respectiv \mathbf{k}_A în sistemul de coordonate (B) , în timp ce fiecare linie corespunde reprezentării vectorilor \mathbf{i}_B , \mathbf{j}_B și respectiv \mathbf{k}_B în sistemul (A) . Astfel putem rescrie:

$${}^B_A R = [{}^B\mathbf{i}_A \quad {}^B\mathbf{j}_A \quad {}^B\mathbf{k}_A] = \begin{bmatrix} {}^A\mathbf{i}_B^T \\ {}^A\mathbf{j}_B^T \\ {}^A\mathbf{k}_B^T \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

de unde reiese mai departe faptul că ${}^A_B R = {}^B_A R^T$ și anume: rotația sistemului (B) astfel încât să se suprapună peste (A) este transpusa rotației sistemului (A) peste (B) . De asemenea, se poate vedea faptul că ${}^B_B R$ reprezintă matricea identitate.

De notat este faptul că un set de matrice de rotație împreună cu produsul matriceal formează un grup, deoarece:

- produsul a două matrice de rotație este de asemenea o matrice de rotație;
- produsul a două matrice de rotație este asociativ, astfel $(R \cdot R') \cdot R'' = R \cdot (R' \cdot R'')$ unde R , R' și R'' sunt matrice de rotație;
- matricea unitate I_d este element neutru deoarece $R \cdot I_d = I_d \cdot R = R$;
- orice matrice de rotație R admite o inversă $R^{-1} = R^T$ astfel încât $R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = I_d$;

Totuși grupul format nu are proprietatea de comutativitate, astfel că în general $R \cdot R' \neq R' \cdot R$.

Să considerăm în continuare un caz particular de rotație, și anume rotația în jurul unei singure axe. Dacă $\mathbf{k}_A = \mathbf{k}_B = \mathbf{k}$ putem nota cu θ unghiul care trebuie aplicat lui \mathbf{i}_A pentru a se suprapune peste \mathbf{i}_B (se va considera o rotație în sens invers acelor de ceasornic). Datorită ortogonalității axelor, unghiul θ va fi identic și pentru \mathbf{j}_A și respectiv \mathbf{j}_B . De reținut faptul că vectorul \mathbf{k} este astfel perpendicular atât pe planul format de \mathbf{i}_A și \mathbf{j}_A cât și pe planul format de \mathbf{i}_B și \mathbf{j}_B . Procesul este ilustrat în Figura 1.9.

Matricea rotației în acest caz poate fi determinată simplu pe baza observației anterioare conform căreia fiecare coloană a matricei ${}^B_A R$ reprezintă proiecțiile vectorilor \mathbf{i}_A , \mathbf{j}_A și \mathbf{k} în sistemul de coordonate (B) . Astfel, \mathbf{i}_A este definit de proiecțiile $[c \ -s \ 0]^T$, \mathbf{j}_A de $[s \ c \ 0]^T$ iar \mathbf{k} de $[0 \ 0 \ 1]^T$. Se observă în Figura 1.9 faptul că $c = \cos(\theta)$ și $s = \sin(\theta)$, ceea ce conduce

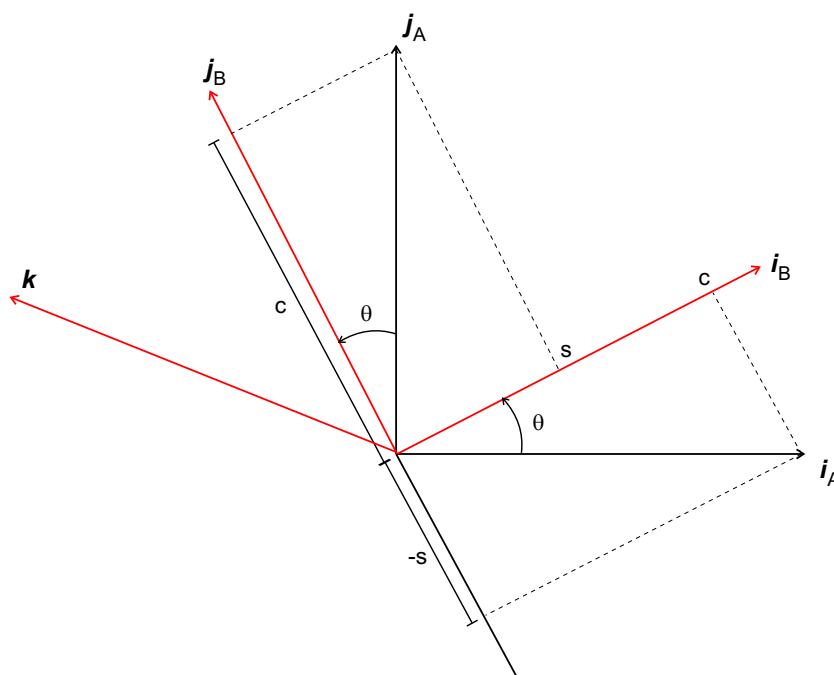


Figura 1.9: Rotatia axelor in plan.

la matricea de rotație:

$${}^B_A R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Considerând vectorul \mathbf{k} în direcția axei optice a camerei (vezi Figura 1.3), matricea $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ reprezintă de fapt rotația coordonatelor imaginii cu un unghi θ în sensul invers acelor de ceasornic.

Transformarea rigidă. Revenind la cazul general inițial al celor două sisteme de coordonate (A) și (B), de origini $O_A \neq O_B$ și ale căror axe de coordonate nu sunt neapărat paralele ($\mathbf{i}_A \neq \mathbf{i}_B$, $\mathbf{j}_A \neq \mathbf{j}_B$, $\mathbf{k}_A \neq \mathbf{k}_B$), punând laolaltă ecuațiile determinate anterior, obținem ceea ce se numește ecuația generală a unei *transformări rigide*, și anume:

$${}^B P = {}^B_A R \cdot {}^A P + {}^B O_A \quad (1.23)$$

Cu alte cuvinte, reprezentarea coordonatelor punctului P în sistemul de coordonate (B) în funcție de coordonatele din sistemul (A) se face în modul

următor: coordonatele lui P în sistemul (B) sunt obținute prin rotația coordonatelor din (A) pe baza unei matrice de rotație ${}^B_A R$ ce reprezintă rotația axelor de coordonate ale sistemului (A) astfel încât să devină paralele cu cele ale sistemului (B) la care se adaugă o translație ce corespunde translatației originii O_A în originea sistemului (B) . Transformarea generală este prezentată în Figura 1.10. Transformarea se numește rigidă deoarece nu deformează distanțele dintre puncte, astfel că distanța Euclidiană a două puncte din spațiu calculată în sistemul (A) este egală distanței dintre acestea obținută în sistemul (B) . De asemenea, aceasta păstrează și unghiurile dintre drepte.

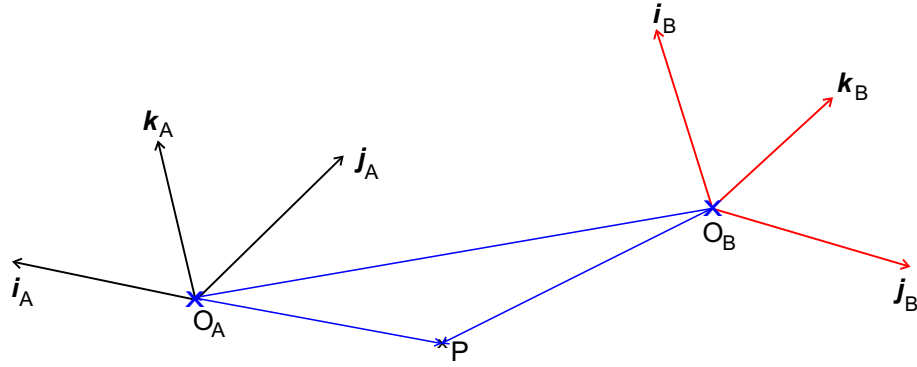


Figura 1.10: Transformarea rigidă generală a sistemului de coordonate.

În cele mai multe cazuri și în special în dispozitivele de prelucrare digitală a imaginilor, este mult mai avantajos ca aceste ecuații să fie reprezentate sub formă matriceală (imaginile sunt modelate matriceal). Astfel, ecuația unei transformări rigide poate fi exprimată matriceal pe baza coordonatelor omogene (vezi ecuația 1.11). Pentru a defini o transformare rigidă în coordonate omogene, ne vom folosi de o proprietate a produsului matriceal care permite reprezentarea acestuia pe baza produselor la nivel de blocuri.

Astfel, dacă avem două matrice A și B de dimensiuni $m \times n$ și respectiv $n \times p$ și le reprezentăm sub forma unor blocuri de valori după cum urmează:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

unde $A_{i,j}$ și $B_{k,l}$, cu $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ reprezintă sub-matrice de dimensiuni $m_i \times n_j$ și respectiv $n_k \times p_l$ (cu alte cuvinte numărul de coloane al sub-matricelor $A_{1,1}$ și $A_{2,1}$ este egal cu numărul de linii al sub-matricelor $B_{1,1}$ și $B_{1,2}$; și similar pentru coloanele lui $A_{1,2}$, $A_{2,2}$ cu liniile lui $B_{2,1}$, $B_{2,2}$), atunci

produsul matriceal al lui A cu B poate fi scris ca:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} & A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} \\ A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} & A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

adică, ca sumă de produse ale blocurilor. Se poate observa că $A \cdot B$ este o matrice de dimensiune $m \times p$, unde $m = \sum_i m_i$ și $p = \sum_l p_l$.

Să considerăm exemplul următor, fie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{bmatrix}$$

Este evident că $A \cdot B$ se poate scrie ca fiind:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{1,1} \cdot b_{1,1} + a_{1,2} \cdot b_{2,1} + a_{1,3} \cdot b_{3,1} & a_{1,1} \cdot b_{1,2} + a_{1,2} \cdot b_{2,2} + a_{1,3} \cdot b_{3,2} \\ a_{2,1} \cdot b_{1,1} + a_{2,2} \cdot b_{2,1} + a_{2,3} \cdot b_{3,1} & a_{2,1} \cdot b_{1,2} + a_{2,2} \cdot b_{2,2} + a_{2,3} \cdot b_{3,2} \\ a_{3,1} \cdot b_{1,1} + a_{3,2} \cdot b_{2,1} + a_{3,3} \cdot b_{3,1} & a_{3,1} \cdot b_{1,2} + a_{3,2} \cdot b_{2,2} + a_{3,3} \cdot b_{3,2} \end{bmatrix}$$

și mai departe produsele pot fi grupate pe blocuri astfel:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} \\ b_{2,1} \\ b_{3,1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,2} \\ b_{2,2} \\ b_{3,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Cu alte cuvinte sub-matricele considerate sunt următoarele:

$$A \cdot B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{array} \right]$$

Folosindu-ne de această proprietate, putem rescrie ecuația 1.23 sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} {}^B P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B R & {}^B O_A \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^A P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

unde ${}^B P$ reprezintă coordonatele punctului P în sistemul (B) , și anume vectorul $[{}^B x \quad {}^B y \quad {}^B z]^T$ (dimensiune 3×1), 1 este scalar (dimensiune 1×1), ${}^B R$ reprezintă matricea rotației sistemului (A) astfel încât să devină paralel cu sistemul (B) (dimensiune 3×3), $\mathbf{0}^T = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ (dimensiune 3×1), ${}^B O_A$ reprezintă coordonatele centrului O_A în sistemul (B) și anume $[t_x \quad t_y \quad t_z]^T$

(au sens de translație, dimensiune 3×1) iar ${}^A P$ reprezintă coordonatele punctului P în sistemul (A) , $[{}^A x \quad {}^A y \quad {}^A z]^T$ (dimensiune 3×1).

Se observă faptul că matricele folosite sunt de fapt reprezentări în coordonate omogene iar matricea ce definește schimbarea sistemului de coordonate devine o matrice 4×4 ($(3 + 1) \times (3 + 1)$).

Avantajul acestei reprezentări este imediat și anume faptul că orice transformare rigidă poate fi scrisă direct ca produs matriceal fără a fi nevoie de însumarea unor matrice, cum era cazul ecuației 1.23. Acest lucru are avantaje din punct de vedere al implementării hardware.

Am văzut faptul că o transformare rigidă permite reprezentarea coordonatelor dintr-un sistem cartezian în altul. Acest lucru poate fi văzut și dintr-o altă perspectivă. Dacă avem un sistem de coordonate (F) , această transformare poate fi folosită și pentru a reprezenta coordonatele unui punct P relativ la coordonatele altui punct P' în cadrul aceluiași sistem de coordonate. Acest lucru poate fi scris ca:

$$\begin{bmatrix} {}^F P' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^F P \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

unde R este o matrice de rotație iar vectorul $\mathbf{t} \in R^3$.

Dacă înlocuim matricea R cu o matrice A arbitrară de aceleași dimensiuni, ecuația 1.27 își păstrează sensul de reprezentare a coordonatelor relativ la puncte diferite dar nu mai garantează conservarea distanțelor dintre acestea, ceea ce înseamnă că noua reprezentare a coordonatelor nu este neapărat una într-un sistem ortonormal. Matricea $\begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ poartă numele de *transformare afină*. Dacă valorile acesteia sunt lăsate a fi alese complet arbitrar atunci spunem că avem de-a face cu o *transformare proiectivă*.

1.2.3 Parametrii geometrici ai camerei

Observăm în secțiunile anterioare faptul că ecuația 1.2 realizează legătura dintre coordonatele (x, y, z) ale unui punct P din scena reală și proiecția acestuia în planul imaginii (vezi Figura 1.3). În realitate, această ecuație este valabilă doar dacă distanțele sunt măsurate în sistemul de referință al camerei iar coordonatele imaginii obținute au ca origine punctul în care axa optică intersectează planul imaginii (retina camerei), notat cu A în Figura 1.3. În practică legătura dintre lumea reală și sistemul de coordonate al camerei este guvernată de mai mulți parametri fizici ai dispozitivelor, precum

distanța focală a lentilelor, dimensiunea pixelilor⁴, poziția centrului imaginii cât și poziția și orientarea camerei.

Relativ la procesul de calibrare geometrică a camerei, se identifică două categorii de astfel de parametri:

- pe de-o parte sunt ceea ce numim *parametrii intrinseci* ai camerei, și anume parametri ce fac legătura dintre sistemul de coordonate al camerei și un sistem ideal, normalizat, ce este considerat că se află la distanță unitară de acesta dintâi,
- pe de altă parte avem *parametrii extrinseci* ai camerei ce fac legătura dintre sistemul de coordonate al camerei și sistemul de coordonate al lumii reale specificând poziția și orientarea acestuia în spațiu.

În cele ce urmează, pentru simplificarea prezentării, vom neglija efectul lentilelor optice cu care sunt echipate de regulă camerele și implicit aberațiile optice ce sunt introduse de acestea, urmând ca ulterior să revenim la acestea în Secțiunea 1.3.3.

Parametrii intrinseci ai camerei

După cum am menționat anterior, este posibil să asociem planului imaginii unei camere, un plan imagine normalizat, paralel cu acesta dar care se află la distanță unitară de originea sistemului camerei (orificiul O). Procesul este ilustrat în Figura 1.11.

Vom atașa acestui plan un sistem de coordonate propriu al cărui centru se află în punctul \hat{C} , și anume punctul în care axa optică a camerei intersectează planul normalizat al imaginii. Notăm cu \hat{p} proiecția în acest plan a unui punct P din scena reală, de coordonate (x, y, z) . Coordonatele omogene ale lui \hat{p} , $[\hat{u} \ \hat{v} \ 1]^T$ pot fi determinate folosind ecuația de proiecție 1.2, astfel:

$$\hat{u} = \frac{x}{z}, \quad \hat{v} = \frac{y}{z} \quad (1.28)$$

unde în acest caz distanța f este unitară. Matriceal, acest lucru poate fi scris ca:

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{z} \cdot [\mathbf{I}_d \ \mathbf{0}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

⁴În general imaginile digitale sunt reprezentate sub formă matriceală, un element al matricei purtând denumirea de pixel ("picture element"). Pixelii corespund înregistrării radiației luminoase pentru o anumită regiune spațială a scenei, ideal cât mai apropiată de un punct. În realitate, pixelii au diverse forme geometrice, pot fi pătratici, dreptunghiulari, și așa mai departe.

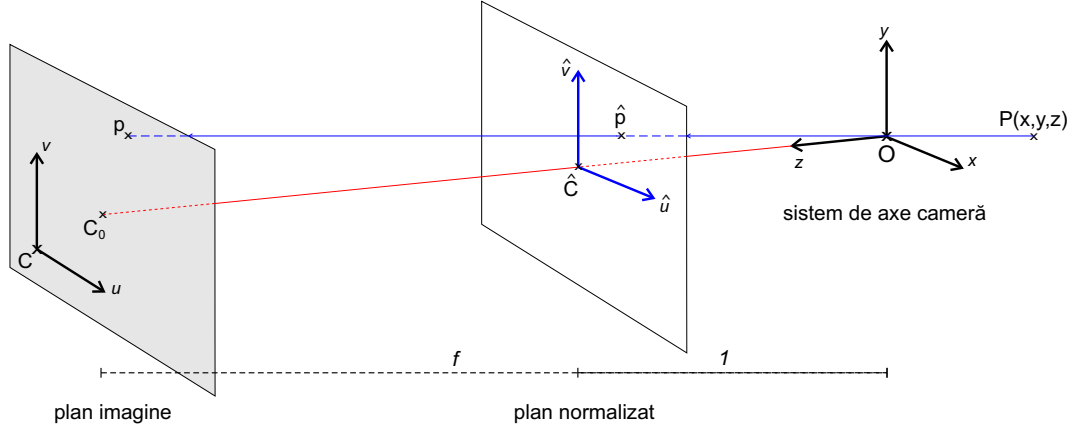


Figura 1.11: Trecerea de la sistemul de coordonate al camerei la un sistem normalizat.

unde I_d este matricea unitate de dimensiune 3×3 , $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ iar \mathbf{P} reprezintă vectorul de coordonate al punctului P , $[x \ y \ z]^T$.

Să ne focalizăm acum atenția asupra planului imaginii (retina camerei). Acesta se află la o distanță f de centrul sistemului camerei în direcția axei optice. Notăm cu $\mathbf{p} = [u \ v \ 1]^T$ vectorul de coordonate al proiecției punctului P din lumea reală în acest plan (vezi Figura 1.11). Semnificația acestuia este de pixel al imaginii astfel formate. Luând în calcul constrângerile fizice, și anume faptul că în realitate pixelii nu sunt puncte ci mai degrabă au formă dreptunghiulară, în ecuația 1.2 vom mai considera doi factori de scală suplimentari k și l astfel încât un pixel va avea dimensiunea $\frac{1}{k} \times \frac{1}{l}$. Astfel, putem scrie:

$$u = \alpha \cdot \frac{x}{z}, \quad v = \beta \cdot \frac{y}{z} \quad (1.30)$$

unde $\alpha = k \cdot f$ și $\beta = l \cdot f$ sunt parametri de scală.

Această ecuație este valabilă totuși doar dacă sistemul de referință considerat în planul imaginii are originea în punctul C_0 , și anume punctul de intersecție al axei optice cu planul imaginii (vezi Figura 1.11). Fiind vorba de o imagine, sistemul de coordonate atașat acestuia își are de regulă originea fie în colțul din stânga jos sau uneori din stânga sus, coordonatele imaginii având sensul de indici ai liniilor și coloanelor pixelilor din aceasta. Astfel, sistemul de coordonate atașat imaginii este translatat cu originea în punctul C (vezi Figura 1.11) iar ecuația 1.30 devine:

$$u = \alpha \cdot \frac{x}{z} + u_0, \quad v = \beta \cdot \frac{y}{z} + v_0 \quad (1.31)$$

unde u_0 și v_0 reprezintă translația lui C față de punctul C_0 .

Totuși în realitate sistemul de referință atașat camerei poate fi înclinat datorită erorilor de fabricație, astfel că unghiul dintre axele acestuia, definite de versorii \mathbf{j}_v și \mathbf{i}_u , este $\theta \neq 90^\circ$ (dar de regulă de o valoare foarte apropiată). Acest lucru este ilustrat în Figura 1.12 unde \mathbf{j}'_v și $\mathbf{i}'_u = \mathbf{i}_u$ reprezintă versorii noilor axe înclinate iar v' și u' sunt noile proiecții ale punctului p pe aceste axe. De remarcat faptul că datorită faptului că noul sistem nu este unul ortogonal, proiecția u' pe axa \mathbf{i}'_u este diferită de u pe axa \mathbf{i}_u .

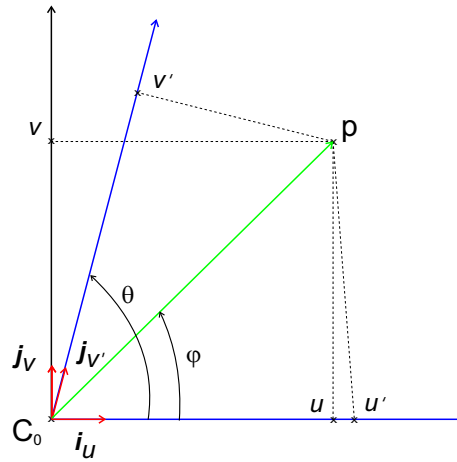


Figura 1.12: Trecerea de la sistemul de axe real înclinat cu unghiul θ la sistemul ideal ortogonal.

Pentru simplificarea calculelor vom porni de la proiecțiile u , v definite de ecuația 1.30, și astfel de la cazul în care originea sistemului de coordonate al imaginii se află în punctul C_0 de pe axa optică (vezi Figura 1.11).

Pentru a face legătura între coordonatele reale v' și u' din cazul sistemului de axe înclinat și coordonatele din cazul ideal când axele sunt ortogonale (v și u) pornim de la expresia vectorului $\overrightarrow{C_0p}$ și anume:

$$\overrightarrow{C_0p} = u' \cdot \mathbf{i}_u + v' \cdot \mathbf{j}'_v \quad (1.32)$$

Dacă înmulțim la stânga și la dreapta cu versorii \mathbf{i}_u și respectiv \mathbf{j}'_v obținem următorul sistem de ecuații:

$$\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{i}_u = u' \cdot \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{i}_u + v' \cdot \mathbf{j}'_v \cdot \mathbf{i}_u \quad (1.33)$$

$$\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{j}'_v = u' \cdot \mathbf{i}_u \cdot \mathbf{j}'_v + v' \cdot \mathbf{j}'_v \cdot \mathbf{j}'_v \quad (1.34)$$

Luând în calcul faptul că $\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{i}_u$ nu este altceva decât proiecția lui $\overrightarrow{C_0p}$ pe axa \mathbf{i}_u egală cu u , iar $\mathbf{j}'_v \cdot \mathbf{i}_u$ este de fapt $\cos(\theta)$, prima ecuație devine:

$$u = u' + v' \cdot \cos(\theta) \quad (1.35)$$

În a doua ecuație, $\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{j}'_v$ se poate scrie ca fiind:

$$\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{j}'_v = |\overrightarrow{C_0p}| \cdot \cos(\theta - \varphi) \quad (1.36)$$

unde $|\overrightarrow{C_0p}| = \sqrt{u^2 + v^2}$.

Dezvoltând termenii și considerând faptul că $\cos(\varphi) = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ iar $\sin(\varphi) = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ obținem:

$$\overrightarrow{C_0p} \cdot \mathbf{j}'_v = u \cdot \cos(\theta) + v \cdot \sin(\theta) \quad (1.37)$$

iar ecuația a doua devine:

$$u \cdot \cos(\theta) + v \cdot \sin(\theta) = u' \cdot \cos(\theta) + v' \quad (1.38)$$

Din ecuațiile 1.35 și 1.38 obținem următoarele relații pentru proiecțiile v' și respectiv u' :

$$u' = u - v \cdot \tan(\theta), \quad v' = \frac{v}{\sin(\theta)} \quad (1.39)$$

Tinând cont de ecuația 1.30 și de translația centrului sistemului de coordonate al imaginii din punctul C_0 în punctul C (vezi Figura 1.11), obținem ecuațiile proiecției punctului P în sistemul de coordonate atașat planului imaginii ce iau în calcul parametrii intrinseci ai camerei:

$$u' = \alpha \cdot \frac{x}{z} - \alpha \cdot \tan(\theta) \cdot \frac{y}{z} + u_0, \quad v' = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \frac{y}{z} + v_0 \quad (1.40)$$

Înlocuind în ecuația 1.41 coordonatele punctului din planul normalizat, aflat la distanță unitate de centrul O (vezi Figura 1.11), obținem relația dintre planul fizic al imaginii și acesta din urmă:

$$u' = \alpha \cdot \hat{u} - \alpha \cdot \tan(\theta) \cdot \hat{v} + u_0, \quad v' = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \hat{v} + v_0 \quad (1.41)$$

iar trecând la coordonate omogene putem scrie:

$$\mathbf{p} = K \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (1.42)$$

$$\text{unde } K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cdot \cotan(\theta) & u_0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin(\theta)} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = [u' \ v' \ 1]^T \text{ iar } \hat{\mathbf{p}} = [\hat{u} \ \hat{v} \ 1]^T.$$

Dacă revenim și exprimăm proiecțiile u' și v' în funcție de coordonatele punctului P , (x, y, z) , din sistemul de coordonate al camerei, atunci putem scrie în coordonate omogene:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{z} \cdot [K \ \mathbf{0}] \cdot \mathbf{P} \quad (1.43)$$

unde $\mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]^T$ iar $\mathbf{P} = [x \ y \ z \ 1]^T$.

Această ecuație reprezintă legătura dintre coordonatele din sistemul camerei (x, y, z) și coordonatele din planul imaginii (u', v') funcție de *parametrii intrinseci* ai camerei, și anume: α , β , θ , u_0 și v_0 .

Parametrii extrinseci ai camerei

Să presupunem acum că sistemul de coordonate al camerei, notat (C) , este diferit de sistemul de coordonate asociat lumii înconjurătoare, notat în continuare (W) . În acest caz, dorim să facem legatură dintre coordonatele unui punct ${}^C P$ în (C) și reprezentarea acestuia în sistemul (W) , ${}^W P$. Aceasta este dată de ecuația 1.23:

$${}^C P = {}^C_W R \cdot {}^W P + {}^C O_W \quad (1.44)$$

unde ${}^C_W R$ reprezintă matricea de rotație a sistemului (W) astfel încât să devină paralel cu sistemul (C) , iar ${}^C O_W$ reprezintă proiecția originii sistemului (W) relativ la originea sistemului (C) (vezi Secțiunea 1.2.2). Conform ecuației 1.26 aceasta poate fi exprimată matriceal în coordonate omogene ca fiind:

$${}^C P = \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^W P \quad (1.45)$$

unde ${}^C P = [x \ y \ z \ 1]^T$, $R = {}^C_W R$ reprezintă matricea unei rotații (dimensiune 3×3), $\mathbf{t} = {}^C O_W$ reprezintă o translație (dimensiune 3×1), $\mathbf{0}^T = [0 \ 0 \ 0]$ și ${}^W P = [{}^W x \ {}^W y \ {}^W z \ 1]^T$ reprezintă coordonatele punctului P în sistemul (W) .

Luând în calcul ecuația 1.43 ce permite exprimarea coordonatelor punctului p din planul imaginii în funcție de coordonatele punctului ${}^C P$ din planul camerei (C) , obținem legătura dintre acesta dintâi și sistemul de coordonate al lumii reale (W) , astfel:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{z} \cdot [K \ \mathbf{0}] \cdot \begin{bmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \cdot {}^W P \quad (1.46)$$

unde $\mathbf{p} = [u' \ v' \ 1]^T$; ceea ce conduce mai departe la ecuația:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{z} \cdot K \cdot [R \ \mathbf{t}] \cdot {}^W P \quad (1.47)$$

Se observă faptul că trecerea de la coordonatele omogene ale lui P în sistemul (W) la coordonatele lui p din sistemul imaginii se face pe baza unei matrice $M = K \cdot [R \ \mathbf{t}]$ de dimensiune 3×4 . Dacă notăm cu \mathbf{m}_i^T , $i = 1, \dots, 3$ liniile matricei M atunci:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \\ \mathbf{m}_2^T \\ \mathbf{m}_3^T \end{bmatrix} \cdot {}^W P \quad (1.48)$$

de unde reiese faptul că $z = \mathbf{m}_3^T \cdot {}^W P$ și mai departe ecuația 1.47 se poate scrie simplificat:

$$u' = \frac{\mathbf{m}_1^T \cdot {}^W P}{\mathbf{m}_3^T \cdot {}^W P}, \quad v' = \frac{\mathbf{m}_2^T \cdot {}^W P}{\mathbf{m}_3^T \cdot {}^W P} \quad (1.49)$$

De notat este faptul că matricea M depinde de 11 parametri: cei 5 parametri intrinseci (α , β , θ , u_0 și v_0 , vezi Secțiunea anterioară) la care se adaugă 6 parametri noi, și anume: 3 unghiuri ce definesc matricea de rotație R și 3 translații ce definesc vectorul de translație \mathbf{t} , parametri ce poartă denumirea de *parametri extrinseci*.

Matricea M poate fi scrisă explicit sub forma următoare:

$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot \mathbf{r}_1^T - \alpha \cdot c \tan(\theta) \cdot \mathbf{r}_2^T + u_0 \cdot \mathbf{r}_3^T & \alpha \cdot t_x - \alpha \cdot c \tan(\theta) \cdot t_y + u_0 \cdot t_z \\ \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_2^T + v_0 \cdot \mathbf{r}_3^T & \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot t_y + v_0 \cdot t_z \\ \mathbf{r}_3^T & t_z \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

unde $R = [\mathbf{r}_1^T \ \mathbf{r}_2^T \ \mathbf{r}_3^T]^T$ și $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$. Matricea M definește astfel vectorul centrului de coordonate al camerei, O , în sistemul de coordonate (W) al lumii reale.

1.3 Calibrarea geometrică a camerei

Procesul de calibrare geometrică a camerei constă la baza în estimarea parametrilor intrinseci și respectiv extrinseci ai acesteia (vezi Secțiunea 1.2.3). Astfel, se urmărește realizarea unei corespondențe directe între coordonatele punctelor din lumea reală, definite de sistemul de coordonate (W , \mathbf{i}_W , \mathbf{j}_W , \mathbf{k}_W), și corespondența acestora în planul imagine reprezentată în sistemul camerei (C , \mathbf{i}_C , \mathbf{j}_C , \mathbf{k}_C). Procesul este ilustrat în Figura 1.13.

Pentru aceasta se folosesc de regulă imagini de calibrare în care sunt marcate o serie de puncte cheie pentru care se consideră că poziția acestora este

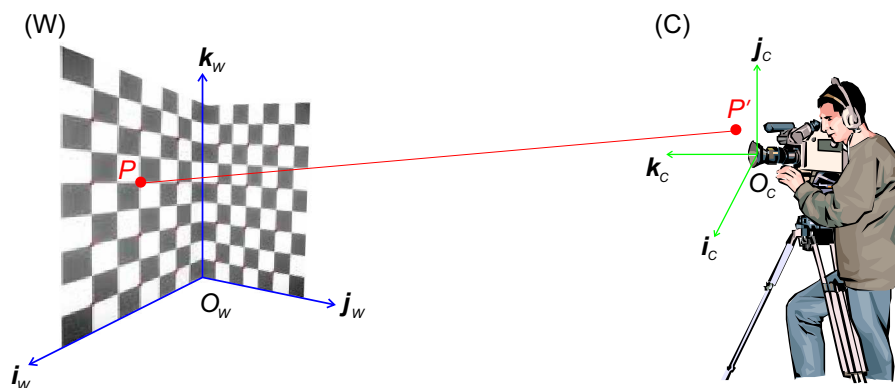


Figura 1.13: Calibrarea geometrică a camerei, (dreapta) imaginea de calibrare, (W) și (C) reprezintă sistemele de coordonate ale lumii și respectiv al camerei.

fixă și cunoscută "a priori" în sistemul de coordonate al lumii (W). În acest context, procesul de calibrare poate fi văzut din perspectiva unei *probleme de optimizare* și anume minimizarea discrepanței dintre pozițiile punctelor cheie observate în lumea reală și poziția teoretică a acestora obținută pe baza proiecției de perspectivă, optimizare ce este guvernată în funcție de parametrii intrinseci și extrinseci ai camerei.

Odată ce camera este calibrată geometric, se poate asocia în orice punct al imaginii observate din (W) o rază bine definită ce conectează acest punct și centrul optic al camerei. Pe baza acestei corespondențe se pot realiza măsurători 3D precise folosind doar imaginea proiectată în planul camerei. Această problemă de optimizare poate fi rezolvată folosind atât abordări liniare cât și neliniare [1].

1.3.1 Estimarea parametrilor din perspectiva metodei celor mai mici pătrate

După cum am menționat anterior, calibrarea geometrică a camerei se reduce la problema estimării parametrilor intrinseci și extrinseci ai acesteia. În acest context, problema de optimizare este enunțată ca fiind determinarea parametrilor intrinseci și extrinseci ai camerei ce minimizează abaterea pătratică medie dintre coordonatele observate și cele prezise.

Abordare liniară

Să considerăm pentru început un sistem liniar cu p ecuații și q necunoscute, definit astfel:

$$\begin{cases} u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \dots + u_{1q} \cdot x_q = y_1 \\ u_{21} \cdot x_1 + u_{22} \cdot x_2 + \dots + u_{2q} \cdot x_q = y_2 \\ \vdots \\ u_{p1} \cdot x_1 + u_{p2} \cdot x_2 + \dots + u_{pq} \cdot x_q = y_p \end{cases} \quad (1.51)$$

Notând $U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1q} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{p1} & u_{p2} & \dots & u_{pq} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_q]^T$ și respectiv $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]^T$, atunci sistemul se poate scrie matriceal ca fiind:

$$U \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (1.52)$$

Este binecunoscut faptul că în general dacă $p < q$ atunci sistemul admite mai multe soluții ce formează un sub-spațiu vectorial al lui R^q , $(q - p)$ dimensional. Dacă $p = q$ atunci sistemul este unic determinat admitând o singură soluție. Dacă $p > q$ atunci acesta nu admite nici o soluție. Totuși această afirmație este valabilă doar dacă rangul lui U (numărul maxim de linii sau coloane independente) este maximal, și anume egal cu $\min\{p, q\}$. Dacă rangul lui U este mai mic decât $\min\{p, q\}$ atunci existența unei soluții depinde de valorile lui \mathbf{y} .

În continuare vom considera cazul în care sistemul are mai multe constrângeri decât necunoscute, $p > q$ iar U are rangul maximal q . Cum în acest caz nu există o soluție exactă, ne vom limita în a determina o aproximație a acesteia și anume vectorul \mathbf{x} ce minimizează eroarea pătratică:

$$E = \sum_{i=1}^p (u_{i1} \cdot x_1 + \dots + u_{iq} \cdot x_q - y_i)^2 = |U \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 \quad (1.53)$$

unde $|\cdot|$ reprezintă norma unui vector.

Notând cu $\mathbf{e} = U \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}$, atunci $E = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}$. Soluția \mathbf{x} ce minimizează valoarea lui E este obținută din anularea derivatelor parțiale relative la necunoscutele x_i , cu $i = 1, \dots, q$, astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial x_i} = 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^T}{\partial x_i} \cdot \mathbf{e} \quad (1.54)$$

Dacă notăm coloanele matricei U cu $\mathbf{c}_j = [u_{1j} \ u_{2j} \ \dots \ u_{pj}]^T$ cu $j = 1, \dots, q$, atunci $U = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_q]$ iar derivata lui \mathbf{e} devine:

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[[\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_q] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_q \end{bmatrix} - \mathbf{y} \right] \quad (1.55)$$

și mai departe:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{c}_1 \cdot x_1 + \dots + \mathbf{c}_q \cdot x_q - \mathbf{y}) = \mathbf{c}_i \quad (1.56)$$

Anulând derivatele obținem:

$$\mathbf{c}_i^T \cdot (U \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (1.57)$$

cu $i = 1, \dots, q$. Punând cap la cap toate ecuațiile putem scrie matriceal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^T \\ \mathbf{c}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{c}_q^T \end{bmatrix} \cdot (U \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) = U^T \cdot (U \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (1.58)$$

și astfel obținem ecuațiile asociate metodei celor mai mici pătrate:

$$U^T \cdot U \cdot \mathbf{x} = U^T \cdot \mathbf{y} \quad (1.59)$$

Dacă U are rangul maxim q atunci matricea $U^T \cdot U$ este inversabilă iar soluția ecuației anterioare este:

$$\mathbf{x} = U^\dagger \cdot \mathbf{y} \quad (1.60)$$

unde $U^\dagger = (U^T \cdot U)^{-1} \cdot U^T$ este pseudo-inversa matricei U . Dacă U este pătratică și non-singulară (determinantul acesteia este diferit de 0), atunci se poate observa că $U^\dagger = U^{-1}$.

Să considerăm în continuare cazul sistemului omogen unde $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, astfel:

$$\begin{cases} u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + \dots + u_{1q} \cdot x_q = 0 \\ u_{21} \cdot x_1 + u_{22} \cdot x_2 + \dots + u_{2q} \cdot x_q = 0 \\ \vdots \\ u_{p1} \cdot x_1 + u_{p2} \cdot x_2 + \dots + u_{pq} \cdot x_q = 0 \end{cases} \quad (1.61)$$

sau sub formă matriceală:

$$U \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.62)$$

În acest caz, dacă \mathbf{x} reprezintă o soluție, atunci implicit $\lambda \cdot \mathbf{x}$ este de asemenea o soluție pentru orice $\lambda \neq 0$. Dacă $p = q$ iar matricea U este non-singulară sistemul admite o singură soluție $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dacă $p \geq q$ pot exista soluții diferite de zero dacă matricea U este singulară iar rangul acesteia este strict mai mic decât q . În acest caz, pentru a minimiza eroarea pătratică medie $E = |U \cdot \mathbf{x}|^2$ este necesară adoptarea unor constrângeri suplimentare deoarece valoarea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ conduce la minimul global al lui E . Dat fiind faptul că $E(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda^2 \cdot E(\mathbf{x})$ o constrângere avantajoasă ce permite evitarea situației menționate anterior este $|\mathbf{x}|^2 = 1$.

Eroarea pătratică medie E poate fi exprimată în funcție de matricea U dacă scriem:

$$E = |U \cdot \mathbf{x}|^2 = (U \cdot \mathbf{x})^T \cdot U \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \cdot U^T \cdot U \cdot \mathbf{x} \quad (1.63)$$

unde matricea $U^T \cdot U$ este prin definiție simetrică și pozitiv semi-definită (pentru $\forall \mathbf{x} \in C^q$, $\mathbf{x}^{*T} \cdot (U^T \cdot U) \cdot \mathbf{x} \geq 0$, unde $*$ reprezintă complex conjugatul).

Matricea $U^T \cdot U$ poate fi diagonalizată prin reprezentarea sa în baza ortonormată formată de vectorii proprii \mathbf{e}_i , cu $i = 1, \dots, q$, asociați valorilor proprii $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_q$. Astfel se poate scrie că:

$$(U^T \cdot U) \cdot \mathbf{e}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.64)$$

Ne putem folosi de această observație pentru a reprezenta orice vector \mathbf{x} în această bază, astfel:

$$\mathbf{x} = \mu_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mu_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + \mu_q \cdot \mathbf{e}_q \quad (1.65)$$

unde μ_i , cu $i = 1, \dots, q$, reprezintă proiecțiile lui \mathbf{x} pe versorii acestei baze (adică vectorii proprii).

În continuare vrem să evaluăm următoarea expresie: $E(\mathbf{x}) - E(\mathbf{e}_1)$, unde \mathbf{e}_1 reprezintă vectorul propriu ce corespunde valorii proprii celei mai mici. Aceasta se scrie ca fiind:

$$E(\mathbf{x}) - E(\mathbf{e}_1) = \mathbf{x}^T \cdot (U^T \cdot U) \cdot \mathbf{x} - \mathbf{e}_1^T \cdot (U^T \cdot U) \cdot \mathbf{e}_1 = A - B \quad (1.66)$$

Conform ecuației 1.64 și folosind observația că vectorii proprii sunt ortonormați, se observă imediat că termenul B devine:

$$B = \lambda_1 \cdot \mathbf{e}_1^T \cdot \mathbf{e}_1 = \lambda_1 \cdot |\mathbf{e}_1|^2 = \lambda_1 \quad (1.67)$$

Revenind la termenul A , acesta se poate scrie pe baza ecuației 1.65 ca fiind:

$$A = \mathbf{x}^T \cdot \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot (U^T \cdot U) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{x}^T \cdot \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^q \mu_j \cdot \mathbf{e}_j^T \cdot \sum_{i=1}^q \mu_i \cdot \lambda_i \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.68)$$

și mai departe considerând faptul că $\mathbf{e}_j^T \cdot \mathbf{e}_i = 0$ pentru $i \neq j$ și are valoarea 1 pentru $i = j$, obținem:

$$A = \sum_{i=1}^q \lambda_i \cdot \mu_i^2 \quad (1.69)$$

Revenind la ecuația 1.66 putem scrie:

$$E(\mathbf{x}) - E(\mathbf{e}_1) = \lambda_1 \cdot \mu_1^2 + \dots + \lambda_q \cdot \mu_q^2 - \lambda_1 \quad (1.70)$$

diferență ce este mărginită inferior de valoarea $\lambda_1 \cdot (\mu_1^2 + \dots + \mu_q^2 - 1) = 0$ (conform constrângerii inițiale $|x|^2 = 1$) ceea ce conduce la observația că:

$$E(\mathbf{x}) \geq E(\mathbf{e}_1) \quad (1.71)$$

În concluzie, vectorul \mathbf{x} de normă unitate ce minimizează eroarea pătratică medie E este exact vectorul propriu \mathbf{e}_1 corespunzător celei mai mici valori proprii λ_1 a matricei $U^T \cdot U$ iar valoarea minimă a lui E este λ_1 .

Exemplu. Pentru a exemplifica cele de mai sus să considerăm următoarea problemă clasică. Având un sistem de coordonate plan definit de $(O, \mathbf{i}_x, \mathbf{j}_y)$ și un set de puncte p_i , cu $i = 1, \dots, n$, de proiecții (x_i, y_i) , se dorește să se determine ecuația dreptei δ ce aproximează cel mai bine aceste puncte. Ecuația dreptei δ o vom exprima în funcție de distanța față de originea sistemului O , notată d , și de normala unitară la aceasta, $\mathbf{n} = [a \ b]^T$, unde a și b reprezintă proiecțiile pe cele două axe iar $|\mathbf{n}| = 1$. Acest lucru este ilustrat în Figura 1.14. Vom rezolva această problemă în sensul celor mai mici pătrate.

Prin analogie cu cele discutate în Secțiunea 1.2.1 (vezi ecuația 1.11), se poate deduce că ecuația unei drepte δ exprimată în plan este dată de:

$$a \cdot x + b \cdot y - d = 0 \quad (1.72)$$

Realizând legătura cu setul de puncte p_i care în mod ideal ar trebui să verifice toate această ecuație, putem determina eroarea pătratică E ca fiind o funcție de a , b și d , astfel:

$$E(a, b, d) = \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b \cdot y_i - d)^2 \quad (1.73)$$

În continuare urmărim să minimizăm pe E relativ la cei trei parametri ce definesc dreapta și având drept constrângere faptul că $a^2 + b^2 = 1$ (dată de $|\mathbf{n}| = 1$). Anulăm valoarea derivatei parțiale după d , astfel:

$$\frac{\partial E}{\partial d} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (a \cdot x_i + b \cdot y_i - d) = 0 \quad (1.74)$$

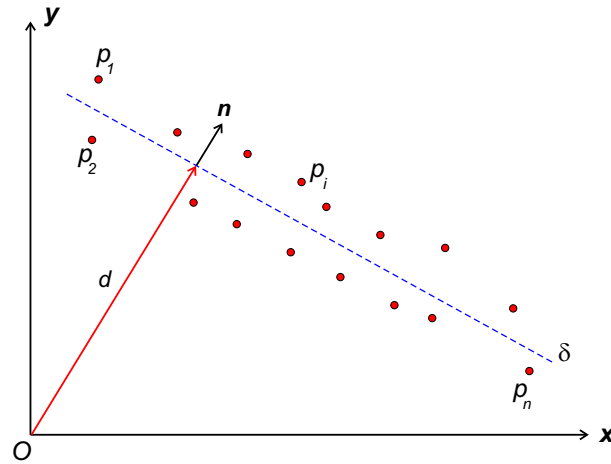


Figura 1.14: Determinarea dreptei ce aproximează cel mai bine un set de puncte predefinite.

cea ce conduce la următoarea valoare a lui d :

$$d = a \cdot \bar{x} + b \cdot \bar{y}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.75)$$

unde \bar{x} și \bar{y} reprezintă coordonatele medii ale celor p_i puncte, (\bar{x}, \bar{y}) având astfel sensul de coordonate ale centrului de masă. Înlocuind valoarea lui d în ecuația 1.73 obținem:

$$E = \sum_{i=1}^n [a \cdot (x_i - \bar{x})^2 + b \cdot (y_i - \bar{y})^2] = |U \cdot \mathbf{n}|^2 \quad (1.76)$$

unde matricea $U = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ \dots & \dots \\ x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} \end{bmatrix}$.

Astfel problema noastră se reduce la a minimiza $|U \cdot \mathbf{n}|^2$ în funcție de \mathbf{n} și având constrângerea $|\mathbf{n}|^2 = 1$. Se poate identifica o problemă de optimizare în sensul celor mai mici pătrate pentru un sistem de ecuații omogene a cărei soluție am demonstrat anterior că este vectorul propriu ce corespunde valorii

proprii celei mai mici a matricei $U^T \cdot U$. Determinând matricea $U^T \cdot U$:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} & \dots & x_n - \bar{x} \\ y_1 - \bar{y} & \dots & y_n - \bar{y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} \\ \dots & \dots \\ x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 & \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) \\ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}) \cdot (x_i - \bar{x}) & \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 & \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} & \sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2 \end{bmatrix} \quad (1.77) \end{aligned}$$

pentru care calculăm vectorul propriu corespunzător valorii proprii celei mai mici, obținem valorile lui a și b și în final din ecuația 1.75 valoarea lui d , problema fiind rezolvată.

Abordare neliniară

Să generalizăm problema și să considerăm acum cazul sistemelor de ecuații neliniare. Fie un sistem neliniar cu p ecuații și q necunoscute:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, x_2, \dots, x_q) = 0 \end{cases} \quad (1.78)$$

unde cu $f_i()$, $i = 1, \dots, p$ am notat un set de funcții diferentiabile cu suport R^q . Matriceal sistemul poate fi exprimat ca fiind:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.79)$$

unde $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_q]^T$ iar $\mathbf{f} = [f_1 \ \dots \ f_p]^T$. Se poate observa că dacă $f_i(x_1, \dots, x_q) = u_{i1} \cdot x_1 + \dots + u_{iq} \cdot x_q - y_i$ obținem cazul sistemelor liniare, iar dacă $y_i = 0$ atunci obținem un sistem liniar omogen.

În acest caz, dacă $p < q$ atunci sistemul admite un set de soluții ce formează o sub-mulțime $(q - p)$ dimensională a lui R^q . Dacă $p = q$ vom avea un set finit de soluții iar dacă $p > q$ nu există soluții. În literatura de specialitate nu există o soluție general valabilă pentru determinarea tuturor

soluțiilor în cazul $p = q$ sau care să permită determinarea minimului global al erorii pătratice medii din metoda celor mai mici pătrate, $E = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$. Metodele existente sunt de regulă iterative și încearcă liniarizarea problemei pentru a obține o aproximație cât mai precisă a soluției căutate.

Acestea pornesc de la dezvoltarea în serie Taylor a funcțiilor $f_i()$ în vecinătatea punctului \mathbf{x} :

$$f_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}) + \delta x_1 \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \dots + \delta x_q \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \quad (1.80)$$

unde am ignorat termenii de ordin 2 și superior. Folosind operatorul gradient, $\nabla f_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_q} \right]^T$, putem rescrie ecuația anterioară astfel:

$$f_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx f_i(\mathbf{x}) + \nabla^T f_i(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} \quad (1.81)$$

unde $\delta\mathbf{x} = \left[\delta x_1 \quad \dots \quad \delta x_q \right]^T$.

Rescriind ecuația anterioară pentru setul de funcții $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, obținem:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla^T f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \nabla^T f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_q \end{bmatrix} \quad (1.82)$$

și mai departe:

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_p(\mathbf{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_q \end{bmatrix} \quad (1.83)$$

ceea ce poate fi scris prescurtat ca:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} \quad (1.84)$$

unde $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ este Jacobianul lui \mathbf{f} .

Metoda lui Newton pentru sisteme pătratice de ecuații neliniare.

În continuare să ne focalizăm atenția asupra cazului în care $p = q$, caz în care sistemul admite un număr finit de soluții. După cum am menționat anterior, nu există o metodă generală de determinare a soluției, dar aceasta poate fi estimată iterativ pornind de la ecuația 1.84.

Să presupunem că $\hat{\mathbf{x}}$ reprezintă un estimat al soluției sistemului \mathbf{x} . În loc să determinăm direct valoarea acestuia, vom considera perturbația $\delta\mathbf{x}$ astfel

încât $\mathbf{x} \simeq \hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}$. Algoritmul urmărește să modifice iterativ valoarea lui $\delta\mathbf{x}$ astfel încât să ne apropiem cât mai mult de soluția reală \mathbf{x} a sistemului. Acest lucru se traduce prin $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = 0$, și astfel:

$$J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (1.85)$$

Dacă Jacobianul lui \mathbf{f} este nesingular, și astfel admite inversă, atunci $\delta\mathbf{x}$ se obține ca soluție a sistemului de q ecuații cu q necunoscute rezultat. Procesul este repetat până când se atinge un anumit criteriu de convergență.

Această metodă converge rapid doar dacă estimatul se află aproape de soluția reală având o rată de convergență pătratică (eroarea la iterația $k+1$ este proporțională cu pătratul erorii de la iterația anterioară k). Dacă soluția de plecare este departe de soluția reală, algoritmul se dovedește a fi ineficient.

Metoda lui Newton pentru sisteme supra-constrânse de ecuații neliniare. În cazul în care $p > q$ se caută un minim local al erorii pătratice medii, $E = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2$. Metoda anterioară poate fi adaptată în această situație observând faptul că un astfel de minim este de fapt un zero al gradientului erorii E . Notând cu $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ gradientul lui E , astfel:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \nabla E(\mathbf{x}) \quad (1.86)$$

problema se transpune în determinarea soluției sistemului de q ecuații și q necunoscute dat de:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.87)$$

Conform metodei anterioare, dacă notăm cu $\hat{\mathbf{x}}$ un estimat al soluției sistemului, căutăm să determinăm iterativ perturbația $\delta\mathbf{x}$ pentru care $\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}) = 0$, și astfel:

$$J_{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (1.88)$$

unde $J_{\mathbf{F}}$ reprezintă Jacobianul lui \mathbf{F} .

Să exprimăm ecuația în funcție de funcțiile f_i cu $i = 1, \dots, p$. Dacă detaliem operatorul gradient, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ se scrie ca fiind:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial E}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \frac{\partial E}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.89)$$

unde eroarea pătratică medie poate fi exprimată ca fiind $E = \sum_{i=1}^p f_i^2(\mathbf{x})$, ceea

ce conduce la:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = J_{\mathbf{f}}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ F_q(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.90)$$

unde $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ reprezintă Jacobianul lui \mathbf{f} . Diferențind pe \mathbf{F} obținem Jacobianul acestuia ca fiind:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_q}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial F_q}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.91)$$

Pentru o mai bună lizibilitate, să calculăm separat unul dintre termeni, de exemplu $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x})$. Înlocuind pe F_1 cu $\sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x})$ obținem:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) \right] = \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right] \quad (1.92)$$

Folosind același raționament, obținem Jacobianul lui \mathbf{F} de forma următoare:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right]^2 \right] & \dots & \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_q}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_q \partial x_1}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) + \frac{\partial f_i}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right] & \dots & \sum_{i=1}^p \left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_q^2}(\mathbf{x}) \cdot f_i(\mathbf{x}) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_q}(\mathbf{x}) \right]^2 \right] \end{bmatrix}$$

Dacă notăm cu $H_{f_i}(\mathbf{x})$ matricea Hessiana a lui f_i , și anume:

$$H_{f_i}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_q}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_q \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_q \partial x_q}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (1.93)$$

Jacobianul lui \mathbf{F} poate fi rescris ca:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{f}}^T(\mathbf{x}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p f_i(\mathbf{x}) \cdot H_{f_i}(\mathbf{x}) \quad (1.94)$$

iar ecuația 1.88 devine:

$$[J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{i=1}^p f_i(\hat{\mathbf{x}}) \cdot H_{f_i}(\hat{\mathbf{x}})] \cdot \delta \mathbf{x} = -J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (1.95)$$

Algoritmul Gauss-Newton. Această metodă pornește de asemenea de la dezvoltarea în serie Taylor a funcțiilor \mathbf{f} (vezi ecuația 1.80). Ca și în cazul metodei lui Newton, se pornește de la un estimat al soluției sistemului, $\hat{\mathbf{x}}$ și se caută determinarea unei perturbații $\delta \mathbf{x}$ astfel încât $\mathbf{x} \simeq \hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}$, unde \mathbf{x} reprezintă soluția reală a sistemului. Spre deosebire de aceasta, nu vom căuta să minimizăm pe $\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x})$, ci vom căuta iterativ pe $\delta \mathbf{x}$ ce minimizează eroarea $E(\hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x})$. Conform ecuației 1.84 se poate scrie:

$$E(\hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x})|^2 \approx |\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) + J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \delta \mathbf{x}|^2 \quad (1.96)$$

cea ce corespunde minimizării erorii pătratice medii în cazul unui sistem liniar de ecuații unde $\delta \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x}$, $-\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow \mathbf{y}$ și $J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) \Leftrightarrow U$ (vezi ecuația 1.53 din Secțiunea 1.3.1). Soluția sistemului este astfel dată de:

$$J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \delta \mathbf{x} = -J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (1.97)$$

Dacă comparăm această ecuație cu ecuația 1.95, se observă că metoda Gauss-Newton poate fi considerată o aproximare a metodei lui Newton pentru care termenul aferent matricei Hessiene este neglijat. Acest lucru este adevărat dacă valorile reziduale ale funcțiilor f_i sunt mici.

Algoritmul Levenberg-Marquardt. O altă variantă constă în modificarea ecuației 1.97 în felul următor:

$$[J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot J_{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}) + \mu \cdot I_q] \cdot \delta \mathbf{x} = -J_{\mathbf{f}}^T(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (1.98)$$

unde μ este un parametru de reglaj ce poate varia de la o iterație la alta. Se observă că termenul aferent matricei Hessiene este de această dată aproximat cu o matrice diagonală constantă. Acest algoritm are o convergență similară metodei Gauss-Newton dar este de regulă mai robust putând fi folosit chiar dacă matricea Jacobiană a lui \mathbf{f} nu are rang maximal și dacă pseudo-inversa acesteia nu poate fi calculată.

1.3.2 O abordare liniară a problemei calibrării camerei

Revenind la problema calibrării geometrice a camerei, să presupunem că avem la dispoziție o imagine de calibrare de forma celei prezentate în Figura

1.13, în care sunt cunoscute "a priori" pozițiile a n puncte de coordonate omogene P_i , cu $i = 1, \dots, n$. Aceste puncte sunt observate în planul imaginii prin intermediul punctelor \mathbf{p}_i de coordonate (u'_i, v'_i) (vezi ecuația 1.47 din Secțiunea 1.2.3). Căutăm să determinăm, conform observațiilor, parametrii intrinseci și extrinseci ai camerei. Procesul de calibrare se realizează de regula în două etape distincte:

- determinarea matricei M de dimensiune 3×4 a transformării de perspectivă definită în ecuația 1.50;
- estimarea parametrilor intrinseci (coeficienții de scalare α și β ; decalajele u_0 și v_0 ; unghiul de înclinare al axelor camerei θ) și respectiv extrinseci (cele trei unghiuri și trei parametri de translație ce definesc poziția sistemului camerei relativ la sistemul lumii, vezi Secțiunea 1.2.3).

Estimarea matricei de proiecție M

Notând cu \mathbf{m}_j^T ($j = 1, \dots, 3$) liniile matricei M , ecuația 1.49 poate fi exprimată pentru fiecare pereche de puncte $\{P_i; (u'_i, v'_i)\}$ ($i = 1, \dots, n$) în felul următor:

$$(\mathbf{m}_1^T - u'_i \cdot \mathbf{m}_3^T) \cdot P_i = 0, \quad (\mathbf{m}_2^T - v'_i \cdot \mathbf{m}_3^T) \cdot P_i = 0 \quad (1.99)$$

Punând cap la cap toate ecuațiile aferente celor n puncte, obținem un sistem linear omogen cu $2 \cdot n$ ecuații ce poate fi scris matriceal ca:

$$P \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (1.100)$$

$$\text{unde } P = \begin{bmatrix} P_1^T & \mathbf{0}^T & -u'_1 \cdot P_1^T \\ \mathbf{0}^T & P_1^T & -v'_1 \cdot P_1^T \\ \dots & \dots & \dots \\ P_n^T & \mathbf{0}^T & -u'_n \cdot P_n^T \\ \mathbf{0}^T & P_n^T & -v'_n \cdot P_n^T \end{bmatrix} \text{ iar } \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \mathbf{m}_3 \end{bmatrix}.$$

Dacă $n \geq 6$ atunci se poate determina soluția sistemului în sensul celor mai mici pătrate, minimizând eroarea $|P \cdot \mathbf{m}|^2$ și având constrângerea $|\mathbf{m}| = 1$ (soluția fiind dată de vectorii proprii, vezi Secțiunea 1.3.1).

Estimarea parametrilor intrinseci și extrinseci

Având determinată matricea M , pe baza valorilor acesteia vom determina în continuare valorile parametrilor intrinseci și respectiv extrinseci. Pentru aceasta, cunoscând originea valorilor din M și folosind ecuația 1.47 putem scrie în cazul general faptul că:

$$M = \rho \cdot [A \quad \mathbf{b}] = K \cdot [R \quad \mathbf{t}] \quad (1.101)$$

unde ρ reprezintă un factor de scalare necunoscut ce a fost introdus pentru a asigura faptul că $|M| = |\mathbf{m}| = 1$, $A = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T \ \mathbf{a}_3^T]^T$ (unde \mathbf{a}_j , $j = 1, \dots, 3$, reprezintă liniile matricei) iar \mathbf{b} este un vector cu sens de translație.

Se observă imediat faptul că:

$$\rho \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \mathbf{a}_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot \mathbf{r}_1^T - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot \mathbf{r}_2^T + u_0 \cdot \mathbf{r}_3^T \\ \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_2^T + v_0 \cdot \mathbf{r}_3^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

unde \mathbf{r}_j^T , cu $j = 1, \dots, 3$, reprezintă liniile matricei de rotație R , $R = [\mathbf{r}_1^T \ \mathbf{r}_2^T \ \mathbf{r}_3^T]^T$.

În cele ce urmează pentru a facilita calculele vom trece la reprezentarea vectorială, calculele fiind reprezentate pe baza de produse scalare (\cdot) și vectoriale (\times). Din punct de vedere vectorial, liniile lui R definesc un sistem de coordonate ortonormat, astfel $|\mathbf{r}_j| = 1$ iar $\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_k = 0$ pentru $j \neq k$ și 1 pentru $j = k$.

Din ecuația 1.102 rezultă imediat faptul că: $\rho \cdot \mathbf{a}_1 = \alpha \cdot \mathbf{r}_1 - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot \mathbf{r}_2 + u_0 \cdot \mathbf{r}_3$, $\rho \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_2 + v_0 \cdot \mathbf{r}_3$ și $\rho \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{r}_3$, ceea ce ne permite să calculăm valoarea lui ρ ca fiind:

$$\rho = \pm \frac{1}{|\mathbf{a}_3|} \quad (1.103)$$

Calculând valoarea lui $\rho \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_3$ obținem:

$$u_0 = \rho \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{r}_3 = \rho^2 \cdot (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3) \quad (1.104)$$

și în mod similar pentru $\rho \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_3$ obținem:

$$v_0 = \rho \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{r}_3 = \rho^2 \cdot (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3) \quad (1.105)$$

Mai departe calculăm produsele vectoriale $\rho \cdot \mathbf{a}_1 \times \mathbf{r}_3$ și $\rho \cdot \mathbf{a}_2 \times \mathbf{r}_3$ și obținem:

$$\rho^2 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) = -\alpha \cdot \mathbf{r}_2 - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot \mathbf{r}_1, \quad \rho^2 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_1 \quad (1.106)$$

unde am folosit observațiile că $\mathbf{r}_j \times \mathbf{r}_j = 0$ și $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3 = -\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1$ conform convenției mâinii drepte (vezi Figura 1.5). Calculând modulele în ecuația anterioară, obținem:

$$\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \cdot \text{ctan}^2(\theta)} = \frac{|\alpha|}{\sin(\theta)} \quad (1.107)$$

$$\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3| = \frac{|\beta|}{\sin(\theta)} \quad (1.108)$$

unde $\sin(\theta)$ este considerat pozitiv deoarece unghiul θ este de regulă în vecinătatea lui $\pi/2$. Mai departe considerând faptul că semnul parametrilor de scalare α și β este cunoscut inițial, acesta poate fi considerat a fi pozitiv, astfel:

$$\alpha = \rho^2 \cdot |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| \cdot \sin(\theta) \quad (1.109)$$

$$\beta = \rho^2 \cdot |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3| \cdot \sin(\theta) \quad (1.110)$$

Realizând produsul scalar dintre ecuațiile 1.106 obținem:

$$\begin{aligned} \rho^4 \cdot (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) &= -\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \\ &= -\rho^4 \cdot |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| \cdot |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3| \cdot \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.111)$$

de unde rezultă unghiul θ :

$$\cos(\theta) = -\frac{(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3| \cdot |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3|} \quad (1.112)$$

Tot din ecuațiile 1.106 rezultă faptul că:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\sin(\theta)}{\beta} \cdot \rho^2 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3|} \quad (1.113)$$

iar \mathbf{r}_2 se obține din \mathbf{r}_1 și \mathbf{r}_3 ca:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \quad (1.114)$$

unde \mathbf{r}_3 a fost obținut inițial ca fiind $\mathbf{r}_3 = \rho \cdot \mathbf{a}_3$.

În acest punct, pentru a determina complet parametrii extrinseci mai trebuie să determinăm vectorul de translație \mathbf{t} . Acesta este obținut ușor din ecuația $\rho \cdot \mathbf{b} = K \cdot \mathbf{t}$ (vezi ecuația 1.42) ca fiind:

$$\mathbf{t} = \rho \cdot K^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (1.115)$$

1.3.3 Calibrarea camerei luând în calcul distorsiunile radiale

Până în acest moment al expunerii, am considerat faptul că camera este echipată cu lentile perfecte, erorile introduse de acestea fiind neglijate. Să considerăm acum una dintre cele mai frecvente perturbatii și anume distorsiunea radială. În acest caz, gradul de distorsiune este dependent de distanța dintre axa optică (centrul optic al imaginii) și punctul din imagine considerat. Un exemplu este ilustrat în Figura 1.15.

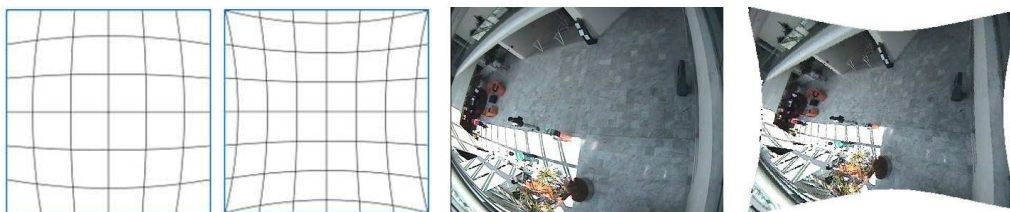


Figura 1.15: Exemple de distorsiuni radiale, prima imagine - efect de butoi, a doua imagine - efect de pernă; a treia imagine prezintă un caz concret de distorsiune și corecția acesteia în ultima imagine folosind [2].

În cele ce urmează vom considera faptul că centrul imaginii este cunoscut "a priori", astfel încât să putem considera $u_0 = v_0 = 0$. Ca și în cazul precedent, vom considera cunoscute pozițiile a n puncte de coordonate omogene P_i , cu $i = 1, \dots, n$, ce sunt observate în planul imaginii prin intermediul punctelor \mathbf{p}_i de coordonate (u'_i, v'_i) . Ecuația 1.47 se poate rescrie ținând cont de distorsiunile radiale în felul următor:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{z} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot P \quad (1.116)$$

unde M este matricea de proiecție iar $\lambda = f(d^2)$ este o funcție polinomială de distanța dintre centrul optic al imaginii (în acest caz am considerat că acesta este identic cu centrul planului imaginii) și pixelul \mathbf{p} , notată d .

Pentru marea parte a aplicațiilor este suficient să folosim funcții polinomiale de grad redus, λ putând fi exprimat ca fiind:

$$\lambda = 1 + \sum_{p=1}^q k_p \cdot d^{2-p} \quad (1.117)$$

unde de regulă $q \leq 3$ iar k_p , $p = 1, \dots, q$ reprezintă coeficienții de distorsiune (de regulă de valori mici).

Să exprimăm în cele ce urmează valoarea lui d^2 în funcție de coordonatele din planul imaginii, (u', v') . Considerând faptul că exprimat în coordonatele planului normal, (\hat{u}, \hat{v}) (vezi Figura 1.11), $d^2 = \hat{u}^2 + \hat{v}^2$ și folosindu-ne mai departe de ecuațiile 1.41 de trecere de la planul normal la planul imaginii, putem scrie:

$$\hat{v} = \frac{v' \cdot \sin(\theta)}{\beta}, \quad \hat{u} = \frac{u'}{\alpha} + \frac{v' \cdot \cos(\theta)}{\beta} \quad (1.118)$$

și mai departe:

$$d^2 = \frac{u'^2}{\alpha^2} + \frac{v'^2}{\beta^2} + 2 \cdot \frac{u' \cdot v'}{\alpha \cdot \beta} \cdot \cos(\theta) \quad (1.119)$$

Exprimând pe d^2 în funcție de (u', v') ne permite de fapt să exprimăm pe λ în funcție de coordonatele din planul imaginii. Astfel ecuația 1.116 devine un sistem cu q (coeficienții de distorsiune) + 11 (parametri intrinseci și extrinseci) parametri, puternic neliniar. Cu toate că este posibilă rezolvarea acestuia cu metodele discutate în Secțiunea 1.3.1, este mai avantajoasă o abordare în doi pași: eliminarea din 1.116 a parametrului λ pentru liniarizarea problemei estimării a 9 dintre parametrii camerei urmată de rezolvarea neliniară a restului de $q + 2$ parametri după cum urmează.

Estimarea matricei de proiecție M

Vom încerca astfel liniarizarea ecuațiilor pentru determinarea primilor 9 parametri ai camerei. Pentru aceasta ne vom folosi de observația că de fapt distorsiunea radială schimbă distanța dintre puncte și centrul imaginii dar nu modifică direcția vectorului ce face legătura între acestea [3]. Să detaliem ecuația 1.116 astfel:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{z} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \cdot P \\ \mathbf{m}_2^T \cdot P \\ \mathbf{m}_3^T \cdot P \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

unde \mathbf{m}_i^T , $i = 1, \dots, 3$, reprezintă liniile matricei M . Să eliminăm a treia dimensiune, astfel:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda \cdot z} \cdot I_2 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^T \cdot P \\ \mathbf{m}_2^T \cdot P \end{bmatrix} \quad (1.121)$$

Tinând cont de faptul că $z = \mathbf{m}_3^T \cdot P$ putem scrie că:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{m}_1^T \cdot P}{\mathbf{m}_3^T \cdot P} \\ \frac{\mathbf{m}_2^T \cdot P}{\mathbf{m}_3^T \cdot P} \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

și mai departe:

$$v' \cdot (\mathbf{m}_1^T \cdot P) - u' \cdot (\mathbf{m}_2^T \cdot P) = 0 \quad (1.123)$$

Înlocuind acum valorile coordonatelor celor n seturi de puncte, $\{P_i; (u'_i, v'_i)\}$ ($i = 1, \dots, n$) obținem n ecuații liniare cu 8 parametri dați de liniile \mathbf{m}_1^T și respectiv \mathbf{m}_2^T , astfel:

$$Q \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.124)$$

$$\text{unde } Q = \begin{bmatrix} v'_1 \cdot P_1^T & -u'_1 \cdot P_1^T \\ \dots & \dots \\ v'_n \cdot P_n^T & -u'_n \cdot P_n^T \end{bmatrix} \text{ și } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}.$$

Dacă $n \geq 8$ evident sistemul este supra-constrâns iar soluția acestuia poate fi aproximată în sensul celor mai mici pătrate.

Estimarea parametrilor intrinseci și extrinseci

Ca și în cazul liniar, vom scrie:

$$\rho \cdot [A \ \mathbf{b}] = M \quad (1.125)$$

unde ρ reprezintă un factor de scalare necunoscut ce a fost introdus pentru a asigura faptul că $|M| = |\mathbf{m}| = 1$, $A = [\mathbf{a}_1^T \ \mathbf{a}_2^T \ \mathbf{a}_3^T]^T$ (unde \mathbf{a}_j , $j = 1, \dots, 3$, reprezintă liniile matricei) iar $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ este un vector cu sens de translație.

Adaptând la faptul că până în acest punct cunoaștem doar prima și a doua linie a matricei M (și anume \mathbf{m}_1^T și \mathbf{m}_2^T), vom rescrie ecuația doar în acest caz:

$$\rho \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \cdot \mathbf{r}_1^T - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot \mathbf{r}_2^T \\ \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_2^T \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha \cdot t_x - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot t_y \\ \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot t_y \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

unde \mathbf{r}_1^T și \mathbf{r}_2^T sunt prima și a doua linie a matricei de rotație R iar t_x și t_y sunt primii doi coeficienți de translație (vezi ecuația 1.50).

În cele ce urmează pentru a facilita calculele vom trece la reprezentarea vectorială, calculele fiind reprezentate pe bază de produse scalare (\cdot) și vectoriale (\times). Astfel putem scrie:

$$\rho \cdot \mathbf{a}_1 = \alpha \cdot \mathbf{r}_1 - \alpha \cdot \text{ctan}(\theta) \cdot \mathbf{r}_2, \quad \rho \cdot \mathbf{a}_2 = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot \mathbf{r}_2 \quad (1.127)$$

Calculând modulul de o parte și de alta și ținând cont de observația că vectorii \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, 3$) fiind vectorii unei rotații definesc un sistem ortonormat iar unghiul θ este în vecinătatea lui $\pi/2$ obținem:

$$\rho \cdot |\mathbf{a}_1| = \pm \frac{\alpha}{\sin(\theta)}, \quad \rho \cdot |\mathbf{a}_2| = \pm \frac{\beta}{\sin(\theta)} \quad (1.128)$$

și astfel obținem valorile lui α și β :

$$\alpha = \pm \rho \cdot |\mathbf{a}_1| \cdot \sin(\theta), \quad \beta = \pm \rho \cdot |\mathbf{a}_2| \cdot \sin(\theta) \quad (1.129)$$

și astfel $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{|\mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1|}$. Mai departe, putem obține unghiul θ dacă realizăm produsul scalar între ecuațiile 1.127 și ne folosim de faptul că $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$, cei doi vectori fiind ortogonali, astfel:

$$\rho^2 \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -\frac{\alpha \cdot \beta}{\sin(\theta) \cdot \sin(\theta)} \cdot \cos(\theta) = -|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2| \cdot \cos(\theta) \quad (1.130)$$

de unde rezultă:

$$\cos(\theta) = -\frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|} \quad (1.131)$$

În continuare să calculăm vectorii \mathbf{r}_1 și \mathbf{r}_2 . Din ecuația 1.127 rezultă imediat faptul că:

$$\mathbf{r}_2 = \rho \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \frac{\sin(\theta)}{\beta} = \pm \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} \quad (1.132)$$

și înlocuind în prima relație obținem:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\rho}{\alpha} \cdot \mathbf{a}_1 \pm \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} = \pm \frac{1}{\sin(\theta)} \cdot \left[\frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|} + \frac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|} \cdot \cos(\theta) \right] \quad (1.133)$$

În final, \mathbf{r}_3 se obține ca produs vectorial $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ ceea ce ne permite să determinăm complet matricea de rotație R .

Revenind la ecuația 1.126 obținem:

$$\rho \cdot b_1 = \alpha \cdot t_x - \alpha \cdot \tan(\theta) \cdot t_y, \quad \rho \cdot b_2 = \frac{\beta}{\sin(\theta)} \cdot t_y \quad (1.134)$$

de unde obținem imediat:

$$t_y = \pm \frac{b_2}{|\mathbf{a}_2|} \quad (1.135)$$

și

$$t_x = \frac{\rho}{\alpha} \cdot b_1 + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \cdot t_y = \pm \frac{1}{\sin(\theta)} \left[\frac{b_1}{|\mathbf{a}_1|} + \frac{b_2}{|\mathbf{a}_2|} \cdot \cos(\theta) \right] \quad (1.136)$$

În acest punct, fără să folosim constrângeri suplimentare nu putem determina parametrul t_z și respectiv pe ρ . Pentru aceasta trebuie să revenim la sistemul din ecuația 1.122. Exprimând fiecare coordonată, obținem următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} (\mathbf{m}_1^T - \lambda \cdot u' \cdot \mathbf{m}_3^T) \cdot P &= 0 \\ (\mathbf{m}_2^T - \lambda \cdot v' \cdot \mathbf{m}_3^T) \cdot P &= 0 \end{aligned} \quad (1.137)$$

unde valorile lui \mathbf{m}_1^T și \mathbf{m}_2^T sunt cunoscute, iar \mathbf{m}_3^T este dat de ecuația 1.50, $\mathbf{m}_3^T = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_3^T & t_z \end{bmatrix}$ unde \mathbf{r}_3 este de asemenea cunoscut.

Dacă înlocuim în expresia lui d^2 din ecuația 1.119 pe α , β și $\cos(\theta)$ obținem:

$$d^2 = \frac{u'^2}{\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_1|^2 \cdot \sin^2(\theta)} + \frac{v'^2}{\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_2|^2 \cdot \sin^2(\theta)} + 2 \cdot \frac{u' \cdot v' \cdot \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_1|^2 \cdot |\mathbf{a}_2|^2 \cdot \sin^2(\theta)} = \frac{|u' \cdot \mathbf{a}_2 - v' \cdot \mathbf{a}_1|^2}{\rho^2 \cdot |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|^2} \quad (1.138)$$

Înlocuind această valoare în valoarea lui λ din sistemul de ecuații 1.137 și considerând toate cele n puncte vom obține un sistem de ecuații neliniar de necunoscute: ρ , t_z și k_p ($p = 1, \dots, q$) coeficienții de distorsiune. Acesta poate fi rezolvat folosind metodele prezentate anterior. Fiind vorba de o estimare iterativă, este necesară stabilirea unor estimate inițiale ale soluțiilor. În cazul ρ și t_z , aceștia pot fi determinați inițial în cazul absenței distorsiunilor radiale, și anume $\lambda = 1$. Dat fiind faptul că valorile k_p sunt mici, o estimare inițială a acestora poate porni de la valoarea 0.

1.3.4 Exemplu practic de metodă de calibrare

În cele ce urmează vom detalia un exemplu concret de calibrare a camerei și anume metoda propusă în [3] ce oferă o precizie a măsurătorilor de până la 1/4000. Pentru exemplificare vom folosi notațiile următoare:

- $P = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ ($i = 1, \dots, n$) reprezintă coordonatele pe cele trei axe a n puncte din lumea reală (W),
- $\mathbf{p} = [u_i \ v_i]^T$ reprezintă coordonatele proiecției punctelor P_i în planul imaginii (sistemul (C), de regulă u este componenta pe orizontală axa fiind orientată spre dreapta iar v este componenta pe verticală axa fiind orientată în sus),
- $\mathbf{a} = [r_i \ c_i]^T$ reprezintă un pixel al matricei imaginii identificat prin numărul liniei r și respectiv numărul coloanei c (sistemul de axe folosit la prelucrarea de imagini consideră axa liniilor verticală și orientată în jos în timp ce axa coloanelor este orizontală și indică spre dreapta),
- (u_0, v_0) corespund coordonatelor punctului de intersecție al axei optice cu planul imaginii (centrul optic și indică decalajul planului imaginii față de acest punct),
- $\{d_x, d_y\}$ reprezintă cei doi factori de scală ce definesc dimensiunea reală a pixelilor (lățime, înălțime),

- τ reprezintă factorul de distorsiune al ratei de aspect al imaginii;
- f reprezintă distanța focală fiind distanța dintre originea sistemului camerei și planul imaginii,
- k_1 reprezintă coeficientul de distorsiune radială,
- $\mathbf{t} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$ reprezintă translațiile sistemului lumii reale (W) față de sistemul camerei (C),
- $R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$ reprezintă matricea de rotație ce descrie rotația sistemului lumii (W) față de sistemul camerei (C).

După cum am menționat în secțiunile anterioare, procesul de calibrare constă în determinarea parametrilor intrinseci și extrinseci ai camerei. În cele ce urmează, vom presupune că parametrii u_0 , v_0 , d_x , d_y și τ sunt cunoscuți pentru modelul de cameră folosit, aceștia fiind parametri constructivi.

Legătura dintre coordonatele reale (u, v) din planul imaginii și poziția pixelului în imagine (r, c), poate fi exprimată pe baza parametrilor intrinseci ca fiind:

$$u = \tau \cdot d_x \cdot (c - u_0) \quad (1.139)$$

$$v = -d_y \cdot (r - v_0) \quad (1.140)$$

Algoritm

Adoptând aceste considerații, algoritmul de calibrare poate fi descris astfel:

1. pe baza celor n perechi de puncte $\{P_i(x_i, y_i, z_i); \mathbf{p}_i(u_i, v_i)\}$ (de regulă $n \geq 5$) definim următorul sistem de ecuații:

$$A \cdot \mu = \mathbf{b} \quad (1.141)$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \cdot x_1 & v_1 \cdot y_1 & -u_1 \cdot x_1 & -u_1 \cdot y_1 & v_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n \cdot x_n & v_n \cdot y_n & -u_n \cdot x_n & -u_n \cdot y_n & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{r_{11}}{r_{12}} \\ \frac{t_y}{r_{21}} \\ \frac{t_y}{r_{22}} \\ \frac{t_y}{t_x} \\ \frac{t_y}{t_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_5 \end{bmatrix} \quad (1.142)$$

Folosind metode specifice rezolvăm sistemul de ecuații obținând astfel valorile vectorului μ .

2. notând cu $U = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2$ calculăm valoarea lui t_y astfel:

$$t_y^2 = \begin{cases} \frac{U - \sqrt{U^2 - 4 \cdot (\mu_1 \cdot \mu_4 - \mu_2 \cdot \mu_3)^2}}{2 \cdot (\mu_1 \cdot \mu_4 - \mu_2 \cdot \mu_3)^2} & \text{daca } (\mu_1 \cdot \mu_4 - \mu_2 \cdot \mu_3) \neq 0 \\ \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} & \text{daca } (\mu_1^2 + \mu_2^2) \neq 0 \\ \frac{1}{\mu_3^2 + \mu_4^2} & \text{daca } (\mu_3^2 + \mu_4^2) \neq 0 \end{cases} \quad (1.143)$$

De observat faptul că semnul lui t_y nu poate fi determinat în acest punct.

3. se consideră t_y pozitiv și se calculează:

$$r_{11} = \mu_1 \cdot t_y \quad (1.144)$$

$$r_{12} = \mu_2 \cdot t_y \quad (1.145)$$

$$r_{21} = \mu_3 \cdot t_y \quad (1.146)$$

$$r_{22} = \mu_4 \cdot t_y \quad (1.147)$$

$$t_x = \mu_5 \cdot t_y \quad (1.148)$$

4. pentru a determina semnul lui t_y se consideră unul dintre cele n puncte a cărui coordonate sunt cât mai depărtate de centrul imaginii, fie $P(x, y, z)$ acel punct. Calculăm:

$$\xi_x = r_{11} \cdot x + r_{12} \cdot y + t_x \quad (1.149)$$

$$\xi_y = r_{21} \cdot x + r_{22} \cdot y + t_y \quad (1.150)$$

Dacă ξ_x nu are același semn cu u , sau dacă ξ_y nu are același semn cu v atunci se schimbă semnul lui t_y și corespunzător se recalculează r_{11} , r_{12} , r_{21} , r_{22} și t_x .

5. calculăm parametrii de rotație rămași astfel:

$$r_{13} = \sqrt{1 - r_{11}^2 - r_{12}^2} \quad (1.151)$$

$$r_{23} = \sqrt{1 - r_{21}^2 - r_{22}^2} \quad (1.152)$$

$$r_{31} = \frac{1 - r_{11}^2 - r_{12} \cdot r_{21}}{r_{13}} \quad (1.153)$$

$$r_{32} = \frac{1 - r_{21} \cdot r_{12} - r_{22}^2}{r_{23}} \quad (1.154)$$

$$r_{33} = \sqrt{1 - r_{31} \cdot r_{13} - r_{32} \cdot r_{23}} \quad (1.155)$$

De observat faptul că în acest punct semnul valorilor lui r_{23} , r_{31} și r_{32} nu poate fi determinat corect. Dacă $r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22}$ este o valoare pozitivă atunci se va schimba semnul lui r_{23} . Pentru validarea celorlalte două valori avem nevoie de valoarea lui f .

6. definim sistemul următor:

$$A' \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b}' \quad (1.156)$$

$$\begin{bmatrix} r_{21} \cdot x_1 + r_{22} \cdot y_1 + t_y & v_1 \\ \dots & \dots \\ r_{21} \cdot x_n + r_{22} \cdot y_n + t_y & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_{31} \cdot x_1 + r_{32} \cdot y_1) \cdot v_1 \\ \dots \\ (r_{31} \cdot x_n + r_{32} \cdot y_n) \cdot v_n \end{bmatrix} \quad (1.157)$$

din care obținem un estimat al lui f și t_z . Dacă $f < 0$ atunci schimbăm semnul parametrilor r_{13} , r_{23} , r_{31} , r_{32} , f și t_z .

7. calculăm modul de modificare al coordonatelor datorită distorsiunii radiale. Vom considera că aceasta poate fi modelată cu un singur parametru de distorsiune k_1 astfel:

$$\tilde{u} = u \cdot (1 + k_1 \cdot d^2) \quad (1.158)$$

$$\tilde{v} = v \cdot (1 + k_1 \cdot d^2) \quad (1.159)$$

unde (\tilde{u}, \tilde{v}) sunt coordonatele reale obținute în urma distorsiunii iar d este cunoscut fiind distanța radială de la punctul considerat la centrul imaginii. Se obține astfel un sistem neliniar de n ecuații:

$$v_i \cdot (1 + k_1 \cdot d^2) = f \cdot \frac{r_{21} \cdot x_i + r_{22} \cdot y_i + r_{23} \cdot z_i + t_y}{r_{31} \cdot x_i + r_{32} \cdot y_i + r_{33} \cdot z_i + t_z} \quad (1.160)$$

cu $i = 1, \dots, n$ a cărui rezolvare conduce la estimarea valorilor lui f , t_z și k_1 .

Exemplu numeric

Să considerăm următorul exemplu numeric practic [5]: avem la dispoziție coordonatele reale a 5 puncte, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, \dots, 5$) și respectiv proiecțiile acestora în planul imaginii, $\mathbf{p}_i(u_i, v_i)$. Valorile sunt ilustrate în Tabelul 1.1.

În cele ce urmează vom folosi algoritmul propus în [3] pentru a determina parametrii camerei ce includ poziția, orientarea și distanța focală. Astfel, matricea A este dată de:

$$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.89 & 0.0 \\ 10.0 & 7.5 & -17.32 & -12.99 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -17.32 & -8.66 & 0.0 \\ 5.0 & 10.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ -5.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \end{bmatrix} \quad (1.161)$$

Tabela 1.1: Exemplu de date de calibrare.

i	x_i	y_i	z_i	u_i	v_i
1	0.0	5.0	0.0	-0.58	0.0
2	10.0	7.5	0.0	1.73	1.0
3	10.0	5.0	0.0	1.73	0.0
4	5.0	10.0	0.0	0.0	1.0
5	5.0	0.0	0.0	0.0	-1.0

și \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.58 \\ 1.73 \\ 1.73 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (1.162)$$

de unde obținem vectorul μ ca fiind:

$$\mu = \begin{bmatrix} -0.17 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -0.2 \\ 0.87 \end{bmatrix} \quad (1.163)$$

Mai departe obținem:

$$U = 0.07, \quad t_y^2 = 25 \quad (1.164)$$

Folosind aceste valori obținem coeficienții de rotație și t_x :

$$r_{11} = -0.87 \quad (1.165)$$

$$r_{12} = 0.0 \quad (1.166)$$

$$r_{21} = 0.0 \quad (1.167)$$

$$r_{22} = -1.0 \quad (1.168)$$

$$t_x = 4.33 \quad (1.169)$$

Pentru estimarea valorilor ξ_x și ξ_y vom folosi punctul $P_2(10.0, 7.5, 0.0)$ și respectiv $\mathbf{p}_2(1.73, 1.0)$. Astfel $\xi_x = -4.33$ și $\xi_y = -2.5$. Cum obținem semne

diferite față de u_2 și v_2 vom schimba semnul lui $t_y = -5$ și astfel recalculăm:

$$r_{11} = 0.87 \quad (1.170)$$

$$r_{12} = 0.0 \quad (1.171)$$

$$r_{21} = 0.0 \quad (1.172)$$

$$r_{22} = 1.0 \quad (1.173)$$

$$t_x = -4.33 \quad (1.174)$$

Calculăm în continuare restul de parametri de rotație:

$$r_{13} = 0.5 \quad (1.175)$$

$$r_{23} = 0.0 \quad (1.176)$$

$$r_{31} = 0.5 \quad (1.177)$$

$$r_{32} = 0.0 \quad (1.178)$$

$$r_{33} = 0.87 \quad (1.179)$$

Valoarea lui $r_{11} \cdot r_{21} + r_{12} \cdot r_{22} = 0$ și astfel lăsăm neschimbat semnul lui r_{23} . Mai departe formăm al doilea sistem de ecuații unde A' este:

$$A' = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 2.5 & -1.0 \\ 0.0 & 0.0 \\ 5.0 & -1.0 \\ -5.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (1.180)$$

iar \mathbf{b}' este:

$$\mathbf{b}' = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 5.0 \\ 0.0 \\ 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} \quad (1.181)$$

de unde obținem:

$$f = -1.0, \quad t_z = -7.5 \quad (1.182)$$

Cum $f < 0$ vom schimba semnul lui $r_{13} = -0.5$, $r_{23} = 0.0$, $r_{31} = -0.5$, $r_{32} = 0.0$, $f = 1$ și $t_z = 7.5$.

În acest exemplu am presupus că nu există distorsiuni radiale astfel calculele se încheie aici.

Bibliografie

- [1] David A. Forsyth, J. Ponce, "Computer Vision: A Modern Approach", Prentice Hall, ISBN-10: 0130851981, 2002.
- [2] R. Hartley, A. Zisserman, "Multiple View Geometry in Computer Vision", 2nd Ed., Chap. 7, Cambridge University Press, ISBN: 0521540518, 2004.
- [3] R.Y. Tsai, "A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology using Off-the-Shelf TV Cameras", IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3(4), pp. 323-344, 1987.
- [4] D.H. Ballard, C.M. Brown, "Computer Vision", Prentice-Hall, ISBN 0-13-165316-4, 1982.
- [5] L.G. Shapiro, G. Stockman, "Computer Vision", Prentice-Hall, ISBN 978-0130307965, 2000.
- [6] R. Szeliski, "Computer Vision: Algorithm and Applications", Springer, ISBN 978-1-84882-934-3, 2010.
- [7] O. Faugeras, Q.-T. Luong, T. Papadopoulos, "The Geometry of Multiple Images", MIT Press, ISBN 0-262-56204-9, 2001.