Universitatea "Politehnica" din Bucureşti
Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii şi Tehnologia Informaţiei

Tehnici Avansate de Prelucrarea şi Analiza Imaginilor

Curs 3 – Modificarea imaginilor prin transformări geometrice

Ş.I. Bogdan IONESCU
Prof. Constantin VERTAN
Conf. Mihai CIUC

Master SIVA - Sisteme Inteligente şi Vedere Artificială 2010-2011

Plan Curs 3 – Transformări geometrice

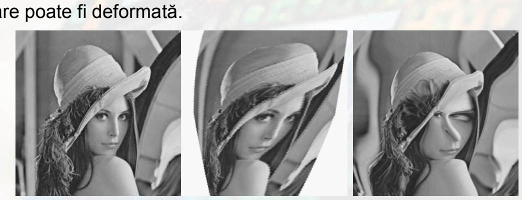
3.1. Introducere

Cum definim o transformare geometrică ?

> clasa de operaţii ce modifică structura de vecinătate a pixelilor din imagine ~ organizarea spaţială a imaginii.

> transformările geometrice implică deplasarea pixelilor în imagine pe noi poziţii (în practică uneori şi modificarea valorilor).

> analogie: imaginea este imprimată pe o foaie subţire de cauciuc, care poate fi deformată.

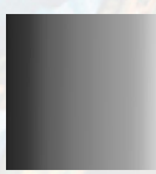


Cum definim o transformare geometrică ?

> dacă mişcarea oricărui pixel este impusă în mod independent de mişcarea celorlalţi pixeli, în cele mai multe cazuri informaţia de formă (geometrică) este amestecată.

imagine iniţială

sferturile imaginii sunt interschimbate

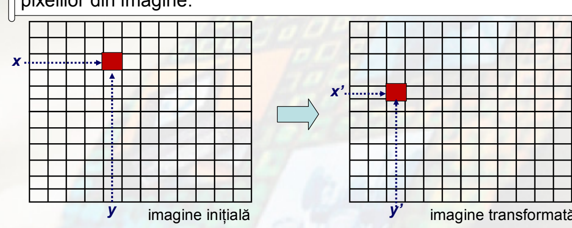


mutare "aleatoare" a pixelilor

→ legea de descriere a mişcării pixelilor nu este aleatoare şi este invariantă spaţial = toti pixelii se supun unei deplasări sau transformări descrise de aceleaşi ecuaţii.

Cum definim o transformare geometrică ?

transformare geometrică = ecuaţia de modificare **a coordonatelor** pixelilor din imagine.



$$(x, y) \rightarrow (x', y') \quad \begin{cases} x' = X(x, y) \\ y' = Y(x, y) \end{cases}$$

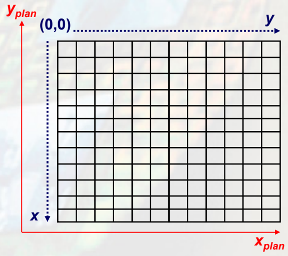
ecuaţiile de modificare a coordonatelor

Cum definim o transformare geometrică ?

convenție sistem de coordonate asociat imaginii:
- origine în colțul din stânga sus (coordonatele cresc de la stânga la dreapta şi de sus în jos)

- prima coordonată este linia (x) şi apoi coloana (y),
- coordonatele pot fi continue, notație (x,y) sau discrete, notație (m,n).
- trecerea la sistemul cartezian planar uzual:

$x_{plan}=y$
$y_{plan}=-x$



3.2. Transformări geometrice

Transformări geometrice afine elementare

transformare afină = orice transformare ce păstrează coliniaritatea (toate punctele ce se găsesc pe o dreaptă se vor găsi tot pe o dreaptă după transformare) şi rapoartele de distanță (ex. mijlocul unui segment de dreaptă va rămane tot mijloc după transformare).

↳ **translația**

deplasarea în plan a conținutului imaginii ~ schimbarea originii sistemului de coordonate ataşat imaginii.

$$x' = X(x,y) = x + x_0$$
$$y' = Y(x,y) = y + y_0$$

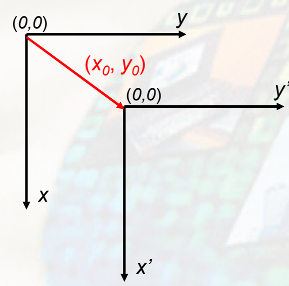
parametri:
x_0 = amplitudine deplasare pe verticală
y_0= amplitudine deplasare pe orizontală

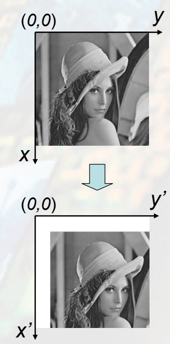
Transformări geometrice afine elementare

$$x' = X(x,y) = x + x_0$$
$$y' = Y(x,y) = y + y_0$$

↳ **translația (continuare)**

păstrează distanțele dintre pixeli





Transformări geometrice afine elementare

↳ **scalarea**

întinderea sau comprimarea conținutului imaginii după una sau ambele axe de coordonate.

$$x' = X(x,y) = \alpha \cdot x$$
$$y' = Y(x,y) = \beta \cdot y$$
cu $\alpha, \beta > 0$

parametri:
α = factor de scalare pe verticală
β = factor de scalare pe orizontală

nu păstrează distanțele dintre pixeli

Transformări geometrice afine elementare

↳ **scalarea (continuare)**

cazuri posibile:

$\alpha = \beta$ → scalare omogenă

$\alpha = \beta = 1$ → $x' = X(x,y) = x$, $y' = Y(x,y) = y$

$\alpha, \beta > 1$ → mărire (întindere) imagine

$\alpha, \beta < 1$ → micşorare (comprimare) imagine

Transformări geometrice afine elementare

↳ **scalarea (continuare)**

$\alpha > 1, \beta < 1$

cazuri posibile:

$\alpha \neq \beta$

→ scalare neomogenă

$\alpha < 1, \beta > 1$

Transformări geometrice afine elementare

↳ **înclinarea ("shearing")**

deplasarea pixelilor după o singură axă de coordonate, dependent de poziția globală în imagine (x,y), cealaltă coordonată rămânând nemodificată.

$$x' = X(x,y) = x$$
$$y' = Y(x,y) = t \cdot x + y$$

cu $t > 0$ = înclinare pe orizontală

$$x' = X(x,y) = x + s \cdot y$$
$$y' = Y(x,y) = y$$

cu $s > 0$ = înclinare pe verticală

parametri: *t,s* coeficienți de înclinare

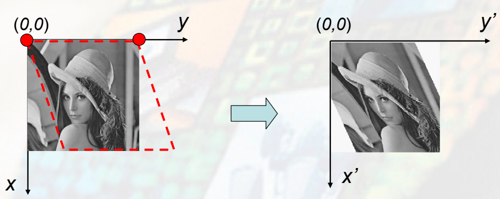
Transformări geometrice afine elementare

$x' = X(x,y) = x$

$y' = Y(x,y) = t \cdot x + y$

↳ **înclinarea (continuare)**

nu păstrează distanțele dintre pixeli



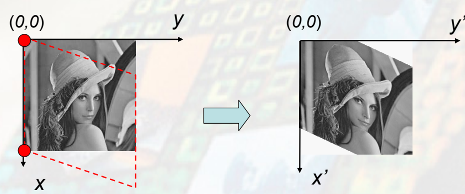
înclinare pe orizontală

Transformări geometrice afine elementare

$x' = X(x,y) = x + s \cdot y$

$y' = Y(x,y) = y$

↳ **înclinarea (continuare)**



înclinare pe verticală

Transformări geometrice afine elementare

↳ **rotația**

deplasare circulară a pixelilor în jurul unui centru de rotație = originea sistemului de coordonate.

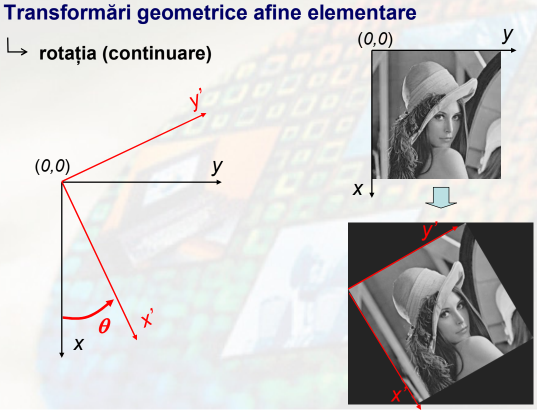
$$x' = X(x,y) = x \cdot \cos\theta + y \cdot \sin\theta$$
$$y' = Y(x,y) = -x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

parametru: θ unghiul de rotație

păstrează distanțele dintre pixeli

Transformări geometrice afine elementare

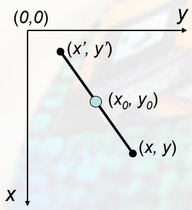
↳ **rotația (continuare)**



Transformări geometrice afine compuse

↳ **reflexia față de un centru de reflexie**

poziția inițială și poziția finală a fiecărui pixel formează un segment de dreaptă al cărui centru este centrul de reflexie.



unde (x_0,y_0) este centrul de reflexie

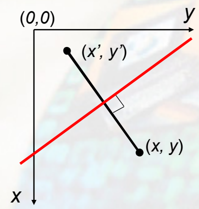
$$x' = X(x,y) = 2x_0 - x$$
$$y' = Y(x,y) = 2y_0 - y$$

păstrează distanțele dintre pixeli

Transformări geometrice afine compuse

↳ **reflexia față de o axă de reflexie**

poziția inițială și poziția finală a fiecărui pixel formează un segment de dreaptă a cărui mediatoare este axa de reflexie.



unde axa de reflexie este dată de ec.: $y = m \cdot x + n$

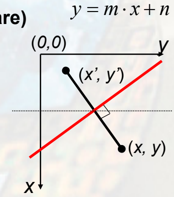
$$\begin{cases} \dfrac{y'-y}{x'-x} = -\dfrac{1}{m} & \text{(perpendiculare)} \\ \dfrac{|y - mx - n|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{|y' - mx' - n|}{\sqrt{m^2+1}} & \text{(dist.)} \end{cases}$$

Transformări geometrice afine compuse

↳ **reflexia față de o axă de reflexie (continuare)**

$y = m \cdot x + n$

$$x' = X(x,y) = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mn}{1+m^2}$$
$$y' = Y(x,y) = \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2n}{1+m^2}$$



cazuri particulare:

→ axa orizontală: x=k (constant), $m = \frac{1}{0}$, $m \to \infty, k = -\frac{n}{m}$

$$x' = X(x,y) = \boxed{-1} \cdot x + \boxed{0} \cdot y - \boxed{2k}$$
$$y' = Y(x,y) = \boxed{0} \cdot x - \boxed{1} \cdot y + \boxed{0}$$

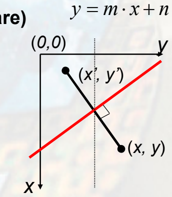
⇨ $x' = X(x,y) = 2k - x$
$y' = Y(x,y) = y$

Transformări geometrice afine compuse

↳ **reflexia față de o axă de reflexie (continuare)**

$y = m \cdot x + n$

$$x' = X(x,y) = \frac{1-m^2}{1+m^2}x + \frac{2m}{1+m^2}y - \frac{2mn}{1+m^2}$$
$$y' = Y(x,y) = \frac{2m}{1+m^2}x - \frac{1-m^2}{1+m^2}y + \frac{2n}{1+m^2}$$



cazuri particulare (continuare):

→ axa verticală: y=k (constant), $m = 0, \ k = n$

$$x' = X(x,y) = \boxed{1} \cdot x + \boxed{0} \cdot y - \boxed{0}$$
$$y' = Y(x,y) = \boxed{0} \cdot x - \boxed{-1} \cdot y + \boxed{2k}$$

⇨ $x' = X(x,y) = x$
$y' = Y(x,y) = 2k - y$

Forma matriceală a transformărilor geometrice elementare

imaginea = o matrice de pixeli, astfel, pentru a putea fi aplicabile, ecuațiile trebuie aduse la o formă matriceală.

↳ transformare afină în general:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B$$

în funcție de valorile matricelor A și B se pot defini transformările enunțate anterior:

↳ **translația:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ unde $A = I_2, \ B = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$

Forma matriceală a transformărilor geometrice elementare

↳ **scalarea:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ unde $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

↳ **înclinarea pe orizontală:**

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ unde $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

↳ **înclinarea pe verticală:**

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ unde $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Forma matriceală a transformărilor geometrice

↳ **rotația:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sensul acelor de ceasornic

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sensul invers acelor de ceasornic

↳ **reflexia față de un punct:**

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{rotatie cu } \theta = \pi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \cdot x_0 \\ 2 \cdot y_0 \end{bmatrix}}_{\text{translație}}$$

Forma matriceală a transformărilor geometrice

↳ **reflexia față de o axă**

$$y = m \cdot x + n$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & -\frac{1-m^2}{1+m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2mn}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} \end{bmatrix}$$

→ sunt transformări compuse din rotații şi translații, deci nu modifică dimensiunea imaginii şi astfel distanța dintre pixelii din imagine.

Transformări geometrice compuse

sunt transformări formate din iterarea unor transformări geometrice elementare (translații, rotații, etc.)

analitic sunt exprimate matricial ca produs de matrice cu excepția translației care necesită efectuarea unei adunări.

↳ **coordonate omogene:**

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ → coordonate plane 2D

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ → coordonate spațiale 3D

⇨ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ → coordonatele plane 2D din planul z=1 din spațiul 3D

Forma matriceală în coordonate omogene

↳ transformare afină în general: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ **translația:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ **scalarea:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Forma matriceală în coordonate omogene

↳ **înclinarea pe verticală:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ **înclinarea pe orizontală:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

↳ **rotația:** $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

Descompunerea operațiilor geometrice complexe

în coordonate omogene orice operație geometrică afină se poate exprima în felul următor:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & x_0 \\ a_{21} & a_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ provin din translație

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

provin din scalare, rotație şi înclinare

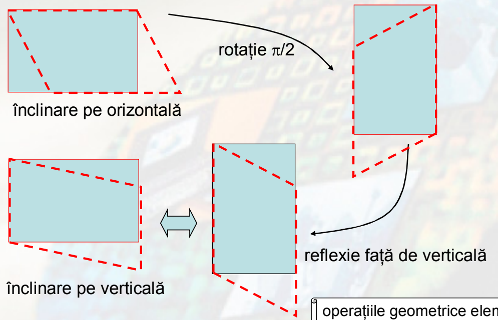
probleme:

dându-se o transformare afină, să se găsească transformările elementare din care este constituită.

⇔

dându-se o serie de transformări elementare, să se găsească o transformare echivalentă unică.

Descompunerea operațiilor geometrice complexe



operațiile geometrice elementare pot fi obținute prin compunerea altor operații elementare

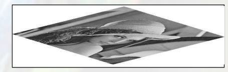
Descompunerea operațiilor geometrice complexe

↳ problema 1: dându-se o serie de transformări elementare, să se găsească o transformare echivalentă unică.

luăm un exemplu: vrem să efectuăm o rotație cu 45º, o înclinare verticală cu un coeficient 0.1, o scalare orizontală cu coeficient 2 şi o scalare verticală cu coeficient 0.5.

rotație $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ înclinare $\begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ scalare orizont. şi verticală $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3535 & 0.3889 \\ -1.4142 & 1.2728 \end{bmatrix}$$

Descompunerea operațiilor geometrice complexe

↳ problema 2: dându-se o transformare afină, să se găsească transformările elementare din care este constituită.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\cos\theta - \alpha s\sin\theta & \alpha\sin\theta + \alpha s\cos\theta \\ -\beta\sin\theta & \beta\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\beta = \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} \qquad \theta = -\arctan\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}{a_{21}}\left(a_{12} - a_{22}\right)$$

$$s = \frac{a_{11}}{a_{21}}\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2} - a_{22}\frac{\sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}}{a_{21}}\left(a_{12} - a_{22}\right)$$

3.3. Implementarea practică

Implementarea operațiilor geometrice

în urma unei transformări geometrice apar două probleme practice:

↳ unde se deplasează pixelii (transformare geometrică)

↳ care este valoarea plasată pe poziția noului pixel

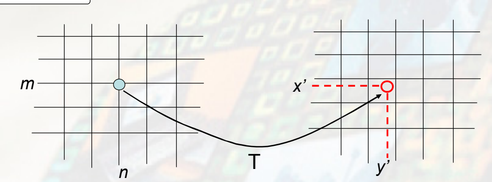
imaginea modificată cât si cea rezultată sunt matrice discrete în care coordonatele pixelilor sunt **numere întregi** pozitive.

transformarea geometrică a imaginii presupune ecuații matematice ce implică de cele mai multe ori **valori reale**

↳ valori întregi → valori reale → valori întregi
= pierdere de informație

Implementarea operațiilor geometrice

situația 1



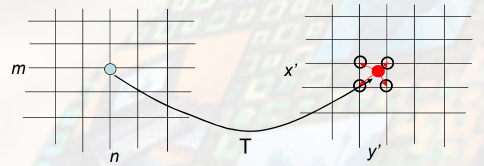
(m, n) coordonate întregi înainte de transformare

(x', y') coordonate reale după transformare

în urma transformării (de regulă directe) coordonatele sunt valori reale cu virgulă situându-se între valorile discrete ale coordonatelor pixelilor.

Implementarea operațiilor geometrice

soluția 1: transportul pixelilor (pixel carry-over)



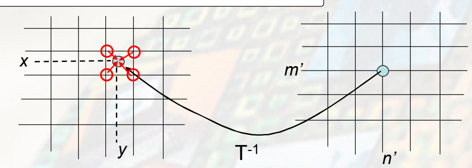
(m, n) coordonate întregi înainte de transformare

(x', y') coordonate reale după transformare

valoarea pixelului este distribuită pixelilor vecini spațial după o regulă de interpolare ("forward mapping").

Implementarea operațiilor geometrice

soluția 2: umplerea pixelilor (pixel filling)



(x, y) coordonate reale inainte de transformare

(m', n') coordonate întregi după transformare

se porneşte de la coordonatele imaginii transformate şi se calculează folosind transformarea inversă coordonatele din imaginea inițială. Valoarea pixelului este obținută din vecini printr-o regulă de interpolare. ("backward-mapping")

Implementarea operațiilor geometrice

↳ pixel carry-over

- este o metodă "risipitoare" deoarece mulți pixeli după transformare ies din imagine.

- fiecare pixel rezultat poate fi accesat de mai multe ori deoarece la valoarea acestuia pot contribuii mai mulți pixeli din imaginea inițială.

- dacă transformarea presupune mărire atunci este posibil ca anumiți pixeli de ieşire să fie evitați → goluri în imagine

Implementarea operațiilor geometrice

↳ pixel filling

- fiecare valoare a pixelilor este determinată unic pe baza interpolării a cel mult 4 valori.

- imaginea inițială este accesată dezordonat în funcție de transformarea geometrică inversă → calcule complexe

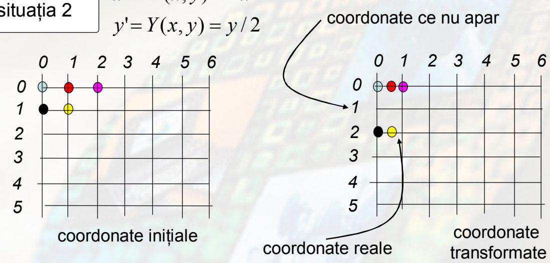
- din punct de vedere practic este mai bun.

- generează imaginea de ieşire pixel cu pixel, toți pixelii sunt alocați.

Implementarea operațiilor geometrice

situația 2

$$x' = X(x, y) = 2x$$
$$y' = Y(x, y) = y/2$$

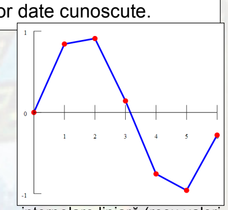


în urma transformării anumiți pixeli nu sunt alocați → soluția constă în "fabricarea" valorilor prin interpolare.

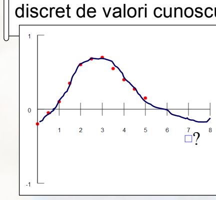
Interpolarea datelor

interpolare = un model matematic ce permite determinarea unor valori de care nu dispunem pe baza unor date cunoscute.

extrapolare = procesul prin care se determină o lege de generare a unor valori noi în afara unui set finit discret de valori cunoscute



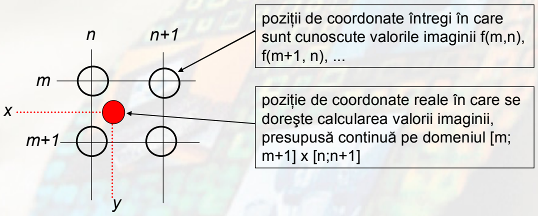
interpolare liniară (roşu valori cunoscute, albastru valori estimate)



extrapolare (roşu valori cunoscute, albastru lege de variație estimată)

Interpolarea datelor

↳ interpolarea de tip cel mai apropiat vecin (nearest neighbor) sau de ordin 0



procedeu: valoarea pixelului (x,y) va fi valoarea vecinului cel mai apropiat spaţial.

Interpolarea datelor

↳ interpolarea de tip cel mai apropiat vecin (nearest neighbor) sau de ordin 0 (continuare)

- complexitate de calcul neglijabilă,

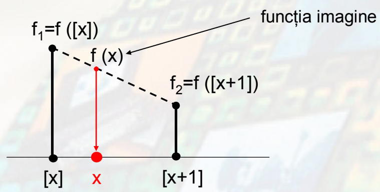
- introduce artefacte (modele vizuale) mai ales în imaginile ce conţin valori ce se schimbă semnificativ de la un pixel la altul (ex. contururi, etc.)

↳ interpolarea bi-liniară

- la bază este o interpolare liniară după fiecare axă.

Interpolarea datelor

↳ interpolarea liniară



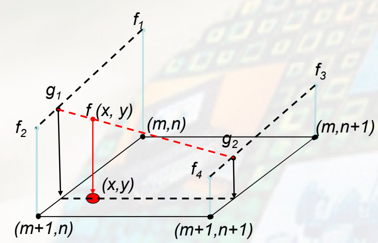
$$f(x) = (f_2 - f_1)(x - [x]) + f_1$$

Interpolarea datelor

↳ interpolarea bi-liniară (continuare)

notaţii:

$f_1 = f(m, n)$
$f_2 = f(m+1, n)$
$f_3 = f(m, n+1)$
$f_4 = f(m+1, n+1)$



-g_1 este interpolat liniar din f_1 şi f_2
-g_2 este interpolat liniar din f_3 şi f_4

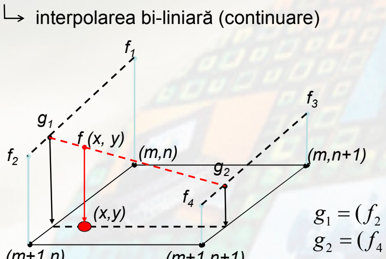
⇨ f(x,y) este interpolat liniar din g_1 şi g_2

Interpolarea datelor

↳ interpolarea bi-liniară (continuare)

notaţii:

$f_1 = f(m, n)$
$f_2 = f(m+1, n)$
$f_3 = f(m, n+1)$
$f_4 = f(m+1, n+1)$



$$g_1 = (f_2 - f_1)(x - m) + f_1$$
$$g_2 = (f_4 - f_3)(x - m) + f_3$$
$$f(x,y) = (g_2 - g_1)(y - n) + g_1$$

⇨ $$f(x,y) = \alpha(x-m)(y-n) + \beta(x-m) + \gamma(y-n) + \delta$$

Interpolarea datelor

↳ cazul general

$$f(x,y) = \left[f(m+1,n+1) - f(m,n+1) - f(m+1,n) + f(m,n)\right]\cdot (x-m)\cdot(y-n) + \left[f(m+1,n) - f(m,n)\right]\cdot(x-m) + \left[f(m,n+1) - f(m,n)\right]\cdot(y-n) + f(m,n)$$

>notăm deplasările pe cele două axe: $a = x - m$
$b = y - n$

>expresia devine:

$$f(x,y) = f(m,n)\cdot(1-a)\cdot(1-b) + f(m,n+1)\cdot b\cdot(1-a) + f(m+1,n)\cdot a\cdot(1-b) + f(m+1,n+1)\cdot a\cdot b$$

Interpolarea datelor

↳ cazul general (continuare)

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot(1-a)\cdot(1-b)+f(m,n+1)\cdot b\cdot(1-a)+$$
$$f(m+1,n)\cdot a\cdot(1-b)+f(m+1,n+1)\cdot a\cdot b$$

această relație se poate generaliza pentru orice funcție de interpolare, *R{x}*, ce are valori nule în afara vecinătății considerate (ex. 4 vecini în acest caz).

→ interpolarea este o sumă ponderată a valorilor pixelilor din vecinătatea considerată:

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot R\{a\}\cdot R\{-b\}+f(m,n+1)\cdot R\{1-b\}\cdot R\{a\}+$$
$$f(m+1,n)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{-b\}+f(m+1,n+1)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{1-b\}$$

Interpolarea datelor

$a=x-m$

$b=y-n$

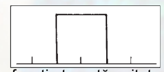
↳ cazul general (continuare)

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot R\{a\}\cdot R\{-b\}+f(m,n+1)\cdot R\{1-b\}\cdot R\{a\}+$$
$$f(m+1,n)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{-b\}+f(m+1,n+1)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{1-b\}$$

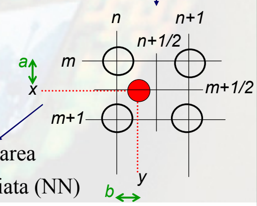
funcțile R{x} definesc tipul (ordinul) interpolării:

↳ **interpolare de ordin 0 →**

$$R\{x\}=R_0\{x\}=1 \quad x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$$



funcție treaptă unitate



$f(x,y)=$ valoarea cea mai apropiata (NN)

Interpolarea datelor

$a=x-m$

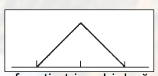
$b=y-n$

↳ cazul general (continuare)

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot R\{a\}\cdot R\{-b\}+f(m,n+1)\cdot R\{1-b\}\cdot R\{a\}+$$
$$f(m+1,n)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{-b\}+f(m+1,n+1)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{1-b\}$$

↳ **interpolare de ordin 1 →**

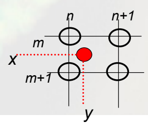
$$R\{x\}=R_1\{x\}=\begin{cases}x+1 & x\in[-1;0]\\ 1-x & x\in[0;1]\end{cases}$$



funcție triunghiulară

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot(1-a)\cdot(1-b)+f(m,n+1)\cdot b\cdot(1-a)+$$
$$f(m+1,n)\cdot a\cdot(1-b)+f(m+1,n+1)\cdot a\cdot b$$

= interpolare biliniară

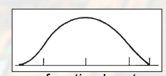


Interpolarea datelor

↳ cazul general (continuare)

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot R\{a\}\cdot R\{-b\}+f(m,n+1)\cdot R\{1-b\}\cdot R\{a\}+$$
$$f(m+1,n)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{-b\}+f(m+1,n+1)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{1-b\}$$

↳ **interpolare de ordin 2 →**



funcție clopot

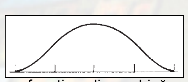
$$R\{x\}=R_2\{x\}=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 & x\in\left[-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right]\\ \frac{3}{4}-x^2 & x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\\ \frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 & x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]\end{cases}$$

Interpolarea datelor

↳ cazul general (continuare)

$$f(x,y)=f(m,n)\cdot R\{a\}\cdot R\{-b\}+f(m,n+1)\cdot R\{1-b\}\cdot R\{a\}+$$
$$f(m+1,n)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{-b\}+f(m+1,n+1)\cdot R\{-(1-a)\}\cdot R\{1-b\}$$

↳ **interpolare de ordin 3 →**



funcție spline cubică

$$R\{x\}=R_3\{x\}=\begin{cases}\frac{2}{3}+\frac{1}{2}|x|^3-x^2 & 0\le|x|\le1\\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3 & 1<|x|\le2\end{cases}$$

avantaj: continuitate şi omogenitate.

↳ **interpolare de ordin n** (se poate defini o funcție generală)

Interpolarea datelor

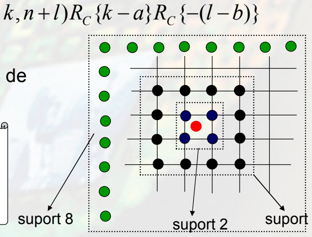
↳ cazul general (continuare)

în exemplele anterioare am considerat 4 vecini, interpolarea se poate extinde pentru cazul general în care considerăm N x N vecini:

$$f(x,y)=\sum_{k=-N/2+1}^{N/2}\sum_{l=-N/2+1}^{N/2}f(m+k,n+l)R_C\{k-a\}R_C\{-(l-b)\}$$

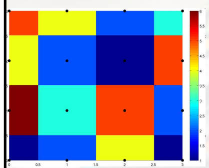
unde $R_C\{\}$ reprezintă o funcție de interpolare

în practică se folosesc interpolări cu suport maxim 4 →**interpolare bicubică** (ex. R_c ordin 3)

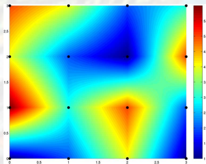


Interpolarea datelor

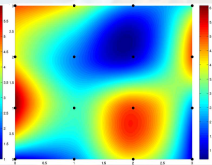
↳ interpolarea NN vs. bi-liniară vs. bi-cubică



cel mai apropiat vecin



biliniară

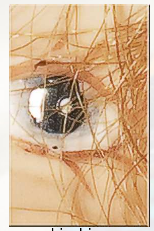


bicubică

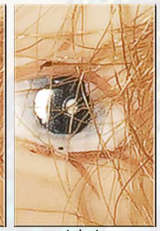
(punctele inițiale sunt marcate cu negru)

Interpolarea datelor

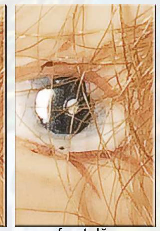
↳ alte exemple (mărirea unei imagini) [R. Bigelow]



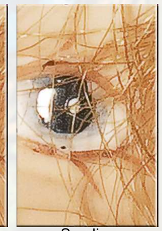
bicubic



stairstep



fractală



S-spline

Interpolarea datelor

↳ alte exemple (mărirea unei imagini) [R. Bigelow]

bicubic

bicubic netezit

stairstep

fractală

Sfârşit Curs