Universitatea “Politehnica” din Bucureşti
Facultatea de Electronică, Telecomunicaţii şi Tehnologia Informaţiei

Tehnici Avansate de Prelucrarea şi Analiza Imaginilor

Curs 7 – Morfologie matematică

Ş.l. Bogdan IONESCU
Prof. Constantin VERTAN
Conf. Mihai CIUC

Master SIVA - Sisteme Inteligente şi Vedere Artificială 2010-2011

Plan Curs 7 – Morfologie matematică

7.1. Introducere

Morfologia matematică

o altă abordare, prelucrarea imaginii în acest caz înseamnă modificarea formei spațiale sau a structurii **obiectelor** dintr-o imagine.

→ morphos = formă
logos = ştiință

- pixelii din imagine (valori + coordonate) vor fi priviți ca fiind structurați în *mulțimi* (partiții, forme, ...)

- modificarea formei obiectelor nu va fi o operație de filtrare în sensul descris anterior (ponderare a vecinilor), ci mai degrabă rezultatul *comparației* formelor din imagine (=interacțiunii, aplicării de reguli) cu o anumită formă prestabilită,

Morfologia matematică

forma prestabilită = **element structurant**: o mulțime geometrică, aleasă arbitrar sau impusă (cunoscută a priori) a cărei formă geometrică determină modul de prelucrare al imaginii.

→ comparația se va reduce la operații clasice pe mulțimi (incluziune, intersecție, reuniune,...) aplicate între *mulțimea imagine* şi *mulțimea element structurant*,

→ astfel, rezultatul unei operații morfologice va fi tot o mulțime.

elementul structurant este echivalentul vecinătății folosite în cazul operațiilor de filtrare de vecinătate, astfel:

$$V_4 = \begin{Bmatrix} (0,0),(0,1),(0,2), \\ (-1,0),(-2,0) \end{Bmatrix}$$

se specifică punctul curent (originea)

coordonate relative

7.2. Operații morfologice pentru imagini binare

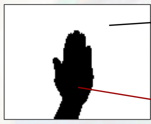
Morfologie matematică imagini binare

echivalența imagine – mulțime este evidentă:

binarizare (vezi Curs 4)

imagine inițială *I* (niveluri gri: 0-255)

imagine binară (negru=0 şi alb=255)



mulțimea imagine A (alb=0 şi negru=1)

$$fundal_X = X^C = \{\alpha \mid \alpha \notin X\}$$

ex.: pixelii ai căror valoare este nulă formează mulțimea "fundal",

vector

$$obiect_X = X = \{\alpha \mid prop(\alpha) = True\}$$

ex.: pixelii ai căror valoare este nenulă formează obiectele sau formele

Morfologie matematică imagini binare

- prelucrarea morfologică a imaginii binare va consta astfel în modificarea formelor obiectelor (valorilor de 1) din mulțimea imagine,

- o abordare abstractă: prelucrarea morfologică este similară procesului de sculptare al unei figuri de lut, unde seturile de unelte sunt diversele elemente structurante.

>tipuri de operații morfologice:

- **operații de bază:** erodare, dilatare.
- **operații compuse:** hit or miss, deschidere, închidere, skeleton, gradient morfologic, ...

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

transformarea de erodare

$$A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$$

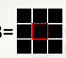
unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, *x* reprezintă un punct/vector oarecare iar B_x reprezintă mulțimea elementului structurant translatată cu originea în *x*:

$$B_x = \{\alpha + x \mid \alpha \in B\}$$

- erodarea morfologica (simbol Θ) a mulțimii *A* prin elementul structurant *B* se defineşte ca fiind mulțimea punctelor din imagine în care elementul structurant translatat este inclus în mulțimea *A*.

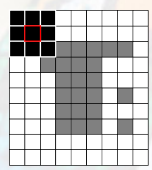
Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

transformarea de erodare (continuare)

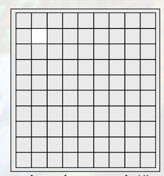
- exemplu: B= 

$$A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$$

- parcurgem imaginea secvențial pixel cu pixel de sus în jos şi de la stânga la dreapta, şi suprapunem elementul structurant:



imaginea inițială A



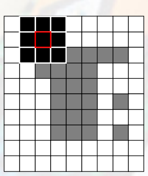
imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

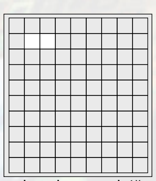
transformarea de erodare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$$



imaginea inițială A



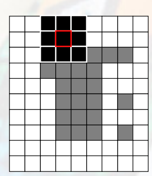
imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

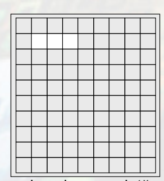
transformarea de erodare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$$



imaginea inițială A



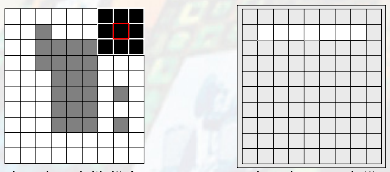
imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

...

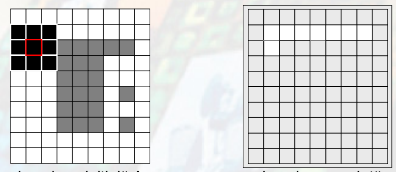


imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$



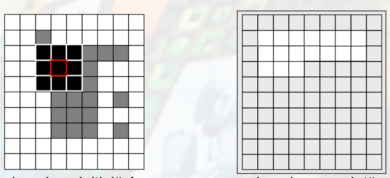
imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

...

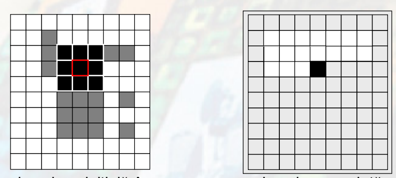


imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

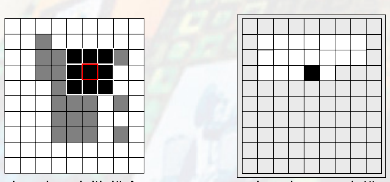


imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$



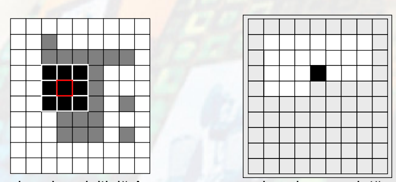
imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

...

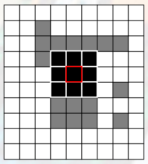


imaginea inițială A — imaginea erodată AΘB

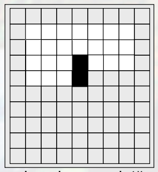
Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$



imaginea inițială A

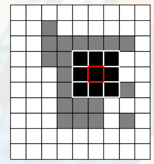


imaginea erodată $A \Theta B$

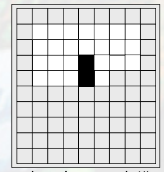
Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$



imaginea inițială A



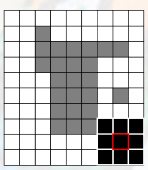
imaginea erodată $A \Theta B$

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

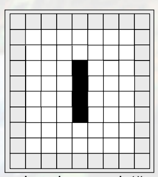
↳ **transformarea de erodare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

...



imaginea inițială A



imaginea erodată $A \Theta B$

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

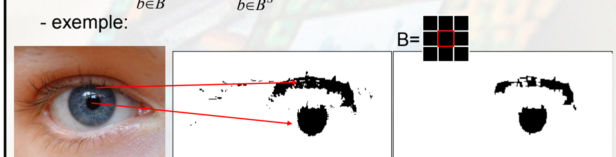
↳ **transformarea de erodare (continuare)** $A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

- formă echivalentă:

$$A \Theta B = \{x \mid \forall b \in B, \exists a \in A \text{ a.i. } \underbrace{b}_{\text{vector}} + \underbrace{x}_{\text{translatare}} = a\}$$

$$A \Theta B = \bigcap_{b \in B} A_{-b} = \bigcap_{b \in B^S} A_b,\ B^S = \{-b \mid b \in B\}$$

- exemple:

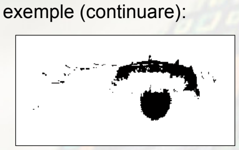


imaginea inițială | imagine binară A | imagine erodată

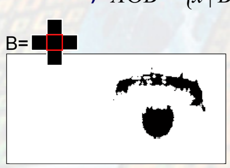
Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de erodare (continuare)** $A \Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

- exemple (continuare):



imagine binară A



imagine erodată

imagine erodată

Observații:
- frontierele obiectelor sunt oarecum netezite de mici fluctuații,
- obiectele sunt micşorate,
- obiectele mici sunt eliminate,
- golurile se măresc,
- forma lui *B* influențează rezultatele,

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare**

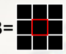
$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, *x* reprezintă un punct/vector oarecare iar B_x reprezintă mulțimea elementului structurant translatată cu originea în *x*:

-dilatarea morfologica (simbol ⊕) a mulțimii *A* prin elementul structurant *B* se defineşte ca fiind mulțimea punctelor din imagine în care elementul structurant translatat are cel puțin un punct comun cu mulțimea *A*.

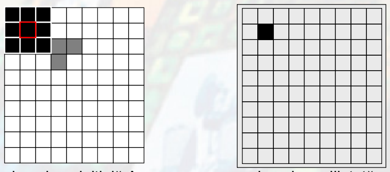
Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu: B= 

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$

- parcurgem imaginea secvențial pixel cu pixel de sus în jos și de la stânga la dreapta, și suprapunem elementul structural:



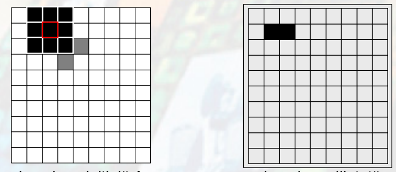
imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$



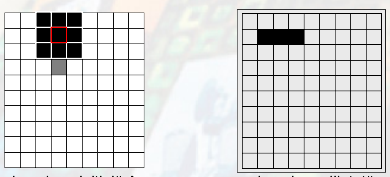
imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$



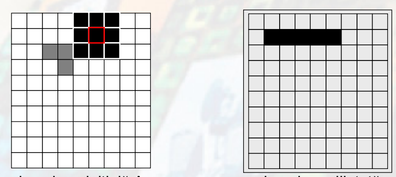
imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$



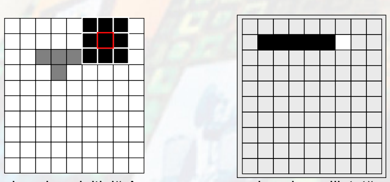
imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$



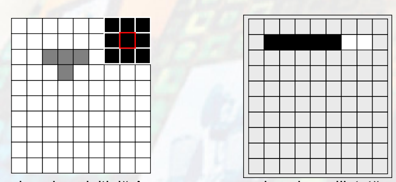
imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ transformarea de dilatare (continuare)

- exemplu (continuare):

$$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$$

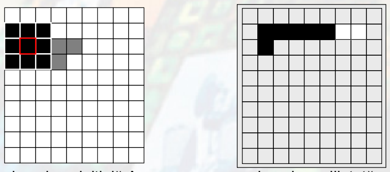


imaginea inițială A | imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$

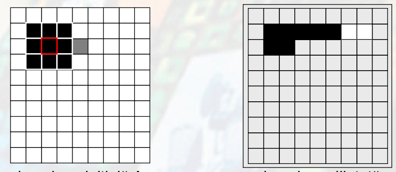


imaginea inițială A imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$



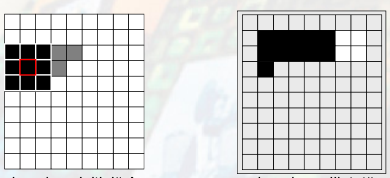
imaginea inițială A imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$

...



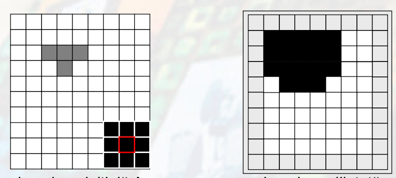
imaginea inițială A imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

- exemplu (continuare): $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$

...



imaginea inițială A imaginea dilatată A⊕B

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

$A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$

- formă echivalentă:

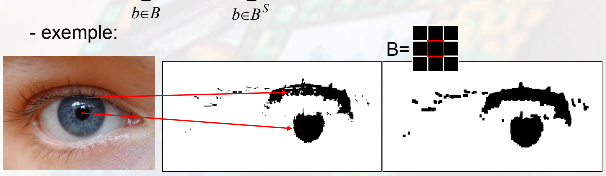
vector translatare

$$A \oplus B = \{x \mid \exists b \in B, \exists a \in A \text{ a.i. } b + x = a\}$$

$$A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_{-b} = \bigcup_{b \in B^S} A_b,\ B^S = \{-b \mid b \in B\}$$

- exemple:

B=



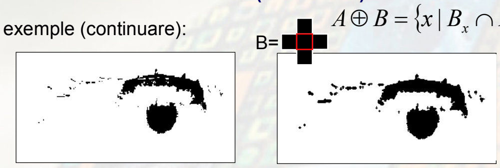
imaginea inițială imagine binară A imagine dilatată

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ **transformarea de dilatare (continuare)**

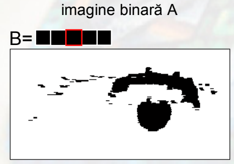
- exemple (continuare): $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \emptyset\}$

B=



imagine binară A imagine dilatată

B=



imagine dilatată

Observații:
- obiectele sunt mărite,
- obiectele mici sunt accentuate,
- golurile mici sunt umplute,
- forma lui *B* influențează direcția de dilatare,

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare

- erodarea şi dilatarea nu sunt *inversabile* şi nu sunt *inversa* una alteia,

- sunt duale în raport cu operația de complementare (^{c}):

$$A^C = \{\alpha \mid \alpha \notin A\}$$

$$\begin{cases} (A \Theta B)^C = A^C \oplus B \\ (A \oplus B)^C = A^C \Theta B \end{cases}$$

- efectele unei transformări asupra obiectelor/formelor sunt efectele dualei sale asupra fundalului (mulțimii duale obiectelor).

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare (continuare)

- invarianță la translație:

$$A_t = \{\alpha + t \mid \alpha \in A\}$$

$$\begin{cases} A_t \oplus B = (A \oplus B)_t \\ A_t \Theta B = (A \Theta B)_t \end{cases} \qquad \begin{cases} A \oplus B_t = (A \oplus B)_{-t} \\ A \Theta B_t = (A \Theta B)_{-t} \end{cases}$$

- invarianță la scalare:

$$\begin{cases} \frac{1}{\lambda}(\lambda A \oplus B) = A \oplus \frac{1}{\lambda} B \\ \frac{1}{\lambda}(\lambda A \Theta B) = A \Theta \frac{1}{\lambda} B \end{cases}$$

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare (continuare)

- monotonie:

- sunt transformări crescătoare față de mulțimea de prelucrat:

$$A_1 \subset A_2, \quad A_1 \oplus B \subset A_2 \oplus B$$
$$A_1 \Theta B \subset A_2 \Theta B$$

- dilatarea este crescătoare față de elementul structurant:

$$B_1 \subset B_2, \quad A \oplus B_1 \subset A \oplus B_2$$

- erodarea este descrescătoare față de elementul structurant:

$$B_1 \subset B_2, \quad A \Theta B_2 \subset A \Theta B_1$$

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare (continuare)

- extensivitate:

- în general dilatarea este extensivă:

$$A \subseteq A \oplus B$$

- în general erodarea este anti-extensivă:

$$A \Theta B \subseteq A$$

- condiția suficientă pentru ca erodarea să fie anti-extensivă şi dilatarea să fie extensivă este ca elementul structurant să îşi conțină originea (nu este însă şi o condiție necesară).

ex.:   etc.

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare (continuare)

- asociativitate ??

$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C^S$$

$$C^S = \{-\alpha \mid \alpha \in C\}$$

$$(A \Theta B) \Theta C = A \Theta (B \oplus C)$$

- distributive față de operațiile clasice cu mulțimi:

$$(A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$
$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Morfologie matematică imagini binare: operații de bază

↳ proprietăți erodare şi dilatare (continuare)

- distributive față de operațiile clasice cu mulțimi (continuare):

$$A \oplus (B \cap C) \subset (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$
$$(B \cap C) \oplus A \subset (B \oplus A) \cap (C \oplus A)$$

$$A \Theta (B \cup C) = (A \Theta B) \cap (A \Theta C)$$
$$(A \cap B) \Theta C = (A \Theta C) \cap (B \Theta C)$$

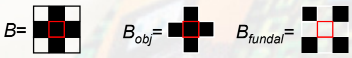
$$A \Theta (B \cap C) \supset (A \Theta B) \cup (A \Theta C)$$
$$(B \cap C) \Theta A \supset (B \Theta A) \cap (C \Theta A)$$

Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss

- dacă scriem elementul structurant ca fiind:

$$B=(B_{obj},B_{fundal}) \text{ unde } B_{fundal}=B_{obj}^C,\ B_{obj}\cap B_{fundal}=\varnothing$$



$$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal}),\ A\Theta B=\{x\mid B_x\subset A\}$$

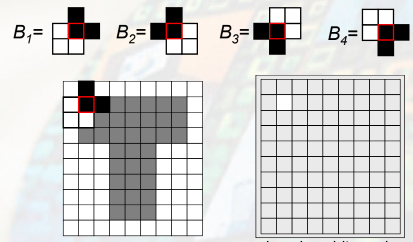
-cu alte cuvinte, mulţimea $A*B$ va conţine toate punctele din originea elementului structurant B pentru care simultan, B_{obj} se regăseşte în A şi B_{fundal} se regăseşte în A^C (~ elementul structurant se regăseşte în imagine = hit)

Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal})$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante:



imaginea iniţială A

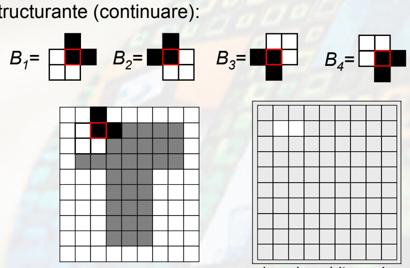
imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal})$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



imaginea iniţială A

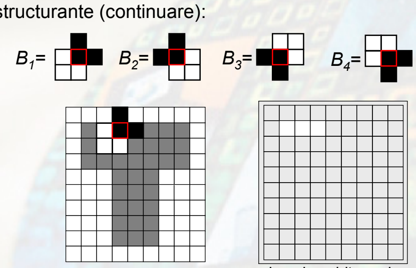
imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal})$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



imaginea iniţială A

imaginea hit or miss $A*B_1$

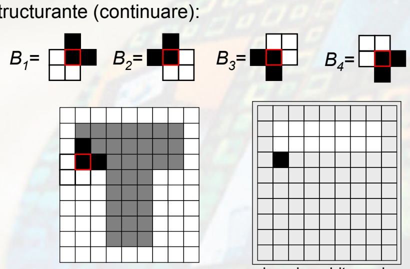
Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal})$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):

...



imaginea iniţială A

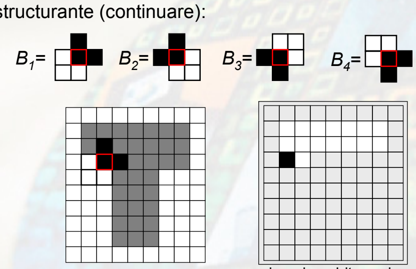
imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operaţii compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$A*B=(A\Theta B_{obj})\cap(A^C\Theta B_{fundal})$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



imaginea iniţială A

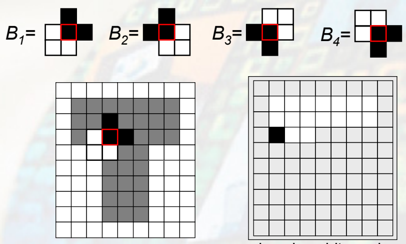
imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



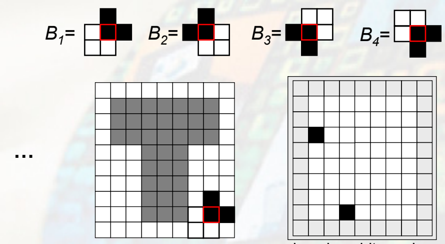
imaginea inițială A | imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



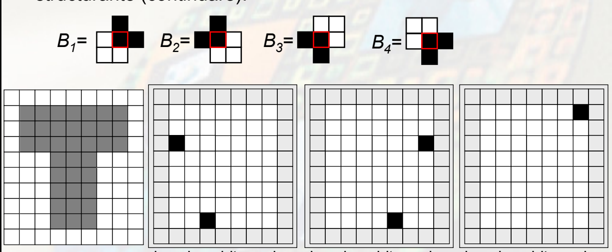
imaginea inițială A | imaginea hit or miss $A*B_1$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



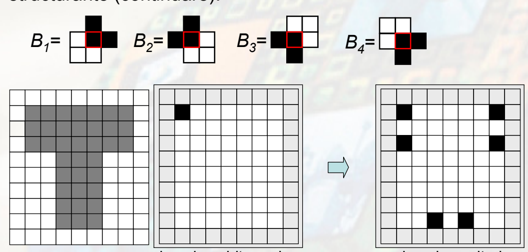
imaginea inițială A | imaginea hit or miss $A*B_1$ | imaginea hit or miss $A*B_2$ | imaginea hit or miss $A*B_3$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea hit or miss (continuare)

$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

- exemplu, considerăm următoarele elemente structurante (continuare):



imaginea inițială A | imaginea hit or miss $A*B_4$ | imagine colțuri $(A*B_1)or(A*B_2)or(A*B_3)or(A*B_4)$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea de deschidere morfologică

$$A^\circ B = (A \Theta B) \oplus B^S$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, Θ este operația de erodare, $\oplus$ este operația de dilatare iar B^S reprezintă mulțimea elementului structurant simetrizată:

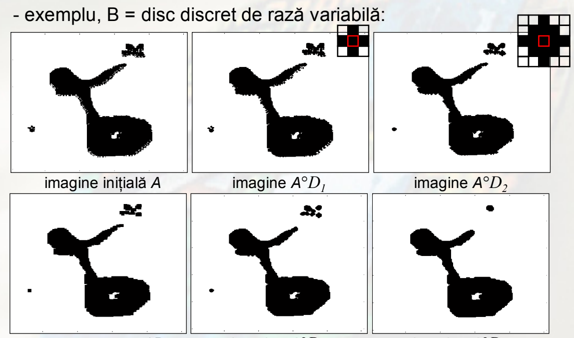
$$B^S = \{-b \mid b \in B\}$$

- deschiderea morfologică a mulțimii *A* prin elementul structurant *B*, se defineşte ca fiind operația de erodare a lui *A* cu elementul structurant *B* urmată de o dilatare cu elementul structurant simetric B^S.

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ transformarea de deschidere morfologică (continuare)

- exemplu, B = disc discret de rază variabilă:



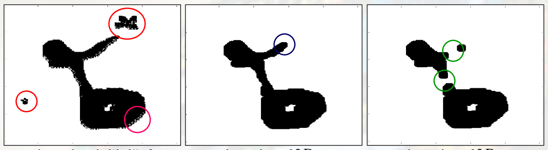
imagine inițială *A* | imagine $A^\circ D_1$ | imagine $A^\circ D_2$

imagine inițială $A^\circ D_3$ | imagine $A^\circ D_4$ | imagine $A^\circ D_5$

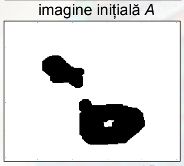
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de deschidere morfologică (continuare)**

- exemplu, B = disc discret de rază variabilă (continuare):



imagine inițială *A* | imagine $A^\circ D_6$ | imagine $A^\circ D_7$



imagine inițială $A^\circ D_8$

Observații:
- componentele conexe ale mulțimii *A* mai mici decât elementul structurant sunt eliminate,
- convexitățile foarte accentuate ale contururilor sunt teșite și "istmurile" sunt îndepărtate,
- efect de netezire al frontierelor,

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de închidere morfologică**

$$A \bullet B = (A \oplus B) \Theta B^S$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, Θ este operația de erodare, ⊕ este operația de dilatare iar B^S reprezintă mulțimea elementului structurant simetrizată:

$$B^S = \{-b \mid b \in B\}$$

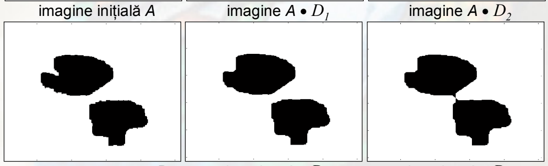
- închiderea morfologică a mulțimii *A* prin elementul structurant *B* se definește ca fiind operația de dilatare a lui *A* cu elementul structurant *B* urmată de o erodare cu elementul structurant simetrizat B^S.

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de închidere morfologică (continuare)**

- exemplu, B = disc discret de rază variabilă:

imagine inițială *A* | imagine $A \bullet D_1$ | imagine $A \bullet D_2$



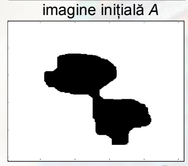
imagine inițială $A \bullet D_3$ | imagine $A \bullet D_8$ | imagine $A \bullet D_9$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de închidere morfologică (continuare)**

- exemplu, B = disc discret de rază variabilă (continuare):

imagine inițială *A* | imagine $A \bullet D_{10}$ | imagine $A \bullet D_{11}$



imagine inițială $A \bullet D_{12}$

Observații:
- golurile din obiecte, mai mici decât elementul structurant sunt umplute,
- concavitățile accentuate ale contururilor sunt umplute și obiectele apropiate sunt unite,
- efect de netezire al frontierelor,

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **proprietăți deschidere și închidere**

- sunt transformări duale:

$$\begin{cases} (A \bullet B)^C = A^C \circ B \\ (A^\circ B)^C = A^C \bullet B \end{cases}$$

- deschiderea este anti-extensivă iar închiderea este extensivă:

$$A^\circ B \subset A \subset A \bullet B$$

- sunt idempotente:

$$\begin{cases} (A^\circ B)^\circ B = A^\circ B \\ (A \bullet B) \bullet B = A \bullet B \end{cases}$$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **umplerea golurilor (hole filling)**

- un defect frecvent în imaginile binare constă în prezența anumitor goluri în interiorul obiectelor ce ar trebui să fie pline (ex. binarizarea imaginii a fost realizată cu un prag inadaptat),

- unele dintre transformările mofologice menționate anterior permit eliminarea golurilor, totuşi acestea modifică și forma obiectului

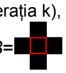
→ se caută o strategie dedicată.

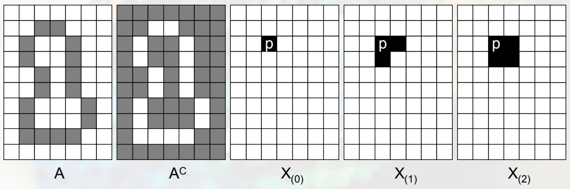
o strategie posibilă:
- în imaginea A^C (fundalul devine obiect), folosind un algoritm de tip "flood-fill" se determină toate obiectele conexe,
- obiectele de o anumită dimensiune din A^C sunt copiate în imaginea inițială A,
- *constrângeri*: necesar un ordin de măsură al golurilor, merge doar pentru anumite tipuri de imagini (ex. obiect vs. fundal)

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ umplerea golurilor (continuare)

o altă strategie mai elaborată:
- se alege un punct de plecare, *p*, $X_{(0)}=\{p\}$ (iterația 0),
- se actualizează regiunea iterativ: $X_{(k)}=\{X_{(k-1)} \oplus B\} \cap A^C$ (iterația k),
- se repetă pasul anterior până când $X_{(k)}=X_{(k-1)}$,
- imaginea obținută este $A \cup X_{(k)}$.

$B=$ 

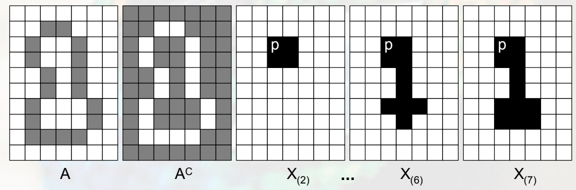


Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ umplerea golurilor (continuare)

o altă strategie mai elaborată (continuare):
- se alege un punct de plecare, *p*, $X_{(0)}=\{p\}$ (iterația 0),
- se actualizează regiunea iterativ: $X_{(k)}=\{X_{(k-1)} \oplus B\} \cap A^C$ (iterația k),
- *se repetă pasul anterior până când* $X_{(k)}=X_{(k-1)}$,
- *imaginea obținută este* $A \cup X_{(k)}$.

$B=$

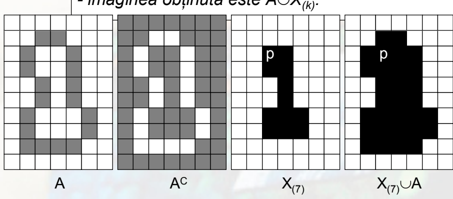


Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ umplerea golurilor (continuare)

o altă strategie mai elaborată (continuare):
- se alege un punct de plecare, *p*, $X_{(0)}=\{p\}$ (iterația 0),
- se actualizează regiunea iterativ: $X_{(k)}=\{X_{(k-1)} \oplus B\} \cap A^C$ (iterația k),
- *se repetă pasul anterior până când* $X_{(k)}=X_{(k-1)}$,
- *imaginea obținută este* $A \cup X_{(k)}$.

$B=$



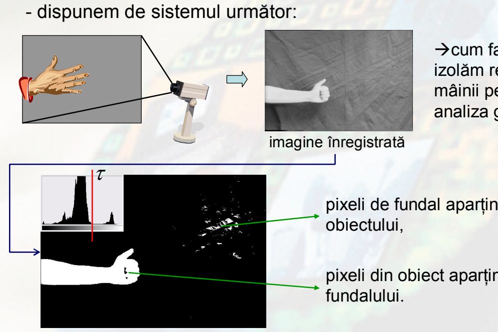
-*limitare*: este necesară cunoaşterea unui punct din interiorul golului.

-*soluție*: se umple fundalul de pe margini → golurile rămân!

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ exemple practice:

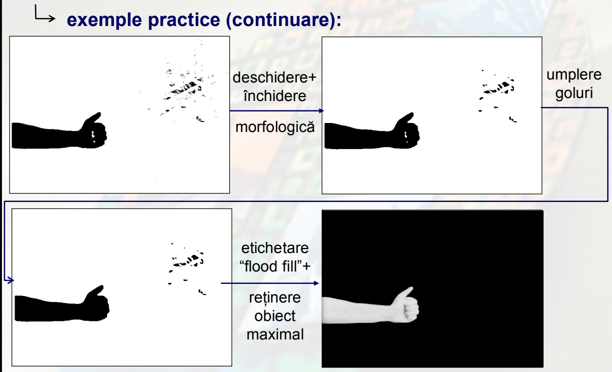
- dispunem de sistemul următor:



→cum facem să izolăm regiunea mâinii pentru analiza gestului ?

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ exemple practice (continuare):



Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

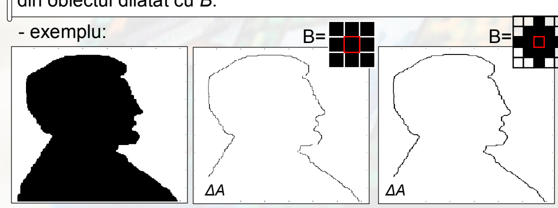
↳ operații de contur: contur exterior

$$\Delta A = (A \oplus B) - A$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant (*ales adecvat*), "-" reprezintă operația de scădere matematică.

- conturul exterior al unui obiect este rezultatul scăderii obiectului din obiectul dilatat cu *B*.

- exemplu:



Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

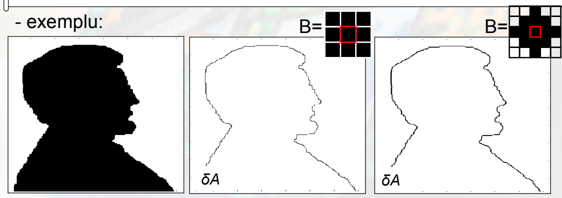
↳ **operații de contur: contur interior**

$$\delta A = A - (A \Theta B)$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant (*ales adecvat*), “-” reprezintă operația de scădere matematică.

- conturul interior al unui obiect este rezultatul scăderii din obiect a obiectului erodat cu *B*.

- exemplu:



Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

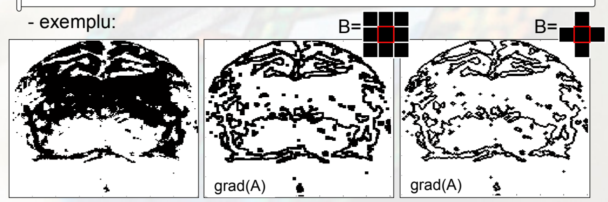
↳ **operații de contur: gradient morfologic**

$$grad(A) = (A \oplus B) - (A \Theta B)$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, “-” reprezintă operația de scădere matematică.

- gradientul morfologic al unui obiect este rezultatul scăderii din obiectul dilatat cu *B* a obiectului erodat cu *B*.

- exemplu:

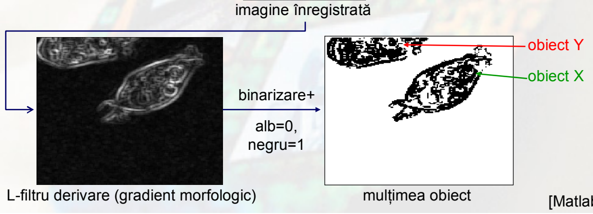


Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **exemple practice:**

- dispunem de sistemul următor:

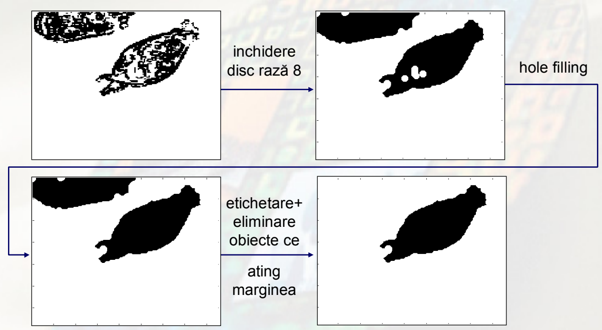
→cum facem să izolăm celula pentru analiza ulterioară a acesteia ?



[Matlab]

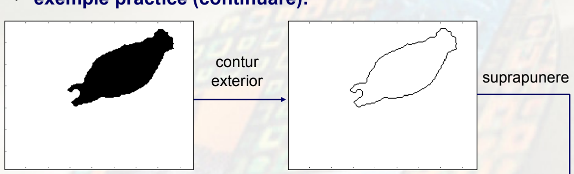
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

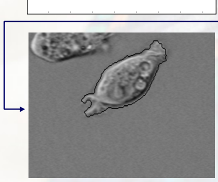
↳ **exemple practice (continuare):**



Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **exemple practice (continuare):**





observații:
- de cele mai multe ori există mai multe soluții pentru aceeaşi problemă, cu rezultate similare,
- totuşi trebuie favorizate soluțiile generale, aplicabile pentru orice imagine.

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de subțiere (thinning)**

- ideal, subțierea constă în înlăturarea punctelor obiectelor astfel încât obiectele fără goluri se erodează până la o linie minimă echidistantă față de marginile cele mai apropiate ale obiectului; şi un obiect cu goluri se erodează până la un inel minim ce se află la mijlocul distanței dintre gol şi marginea cea mai apropiată a obiectului.

$$A \otimes B = A - (A * B)$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant, “-” reprezintă operația de scădere matematică iar “*” reprezintă transformarea hit or miss.

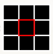
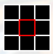
$$A \otimes B = A \cap (A * B)^C$$

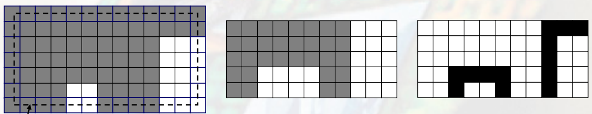
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- exemple:

$$A \otimes B = A - (A * B)$$
$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

B=  B_{obj}=  B_{fundal}=nu



imaginea inițială A — imaginea A*B — imaginea $A \otimes B$

bordare prin duplicarea liniilor/coloanelor

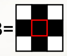
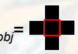
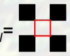
observație: subțierea este nesimetrică.

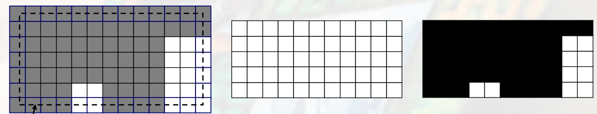
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- exemple (continuare):

$$A \otimes B = A - (A * B)$$
$$A * B = (A \Theta B_{obj}) \cap (A^C \Theta B_{fundal})$$

B=  B_{obj}=  B_{fundal}= 



imaginea inițială A — imaginea A*B — imaginea $A \otimes B$

bordare prin duplicarea liniilor/coloanelor

observație: *B* trebuie să fie ales adecvat.

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor

definim *{B}* ca fiind:

$$\{B\} = \{B^1, B^2, ..., B^n\}$$

unde elementul structurant B^i reprezintă o rotație a lui B^{i-1} (~ dispunem de o mulțime de elemente structurante orientate)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- subțierea se realizează progresiv, în cascadă, prin aplicarea iterativă a fiecărui element structurant din setul *{B}*

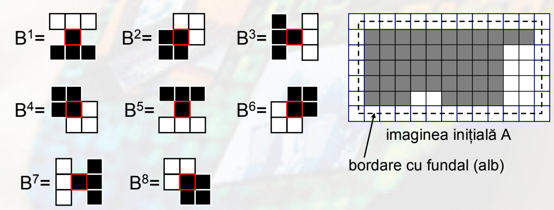
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu:



imaginea inițială A

bordare cu fundal (alb)

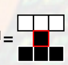
[H. Coetzer]

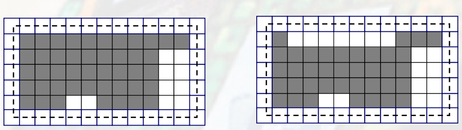
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare): B^1= 



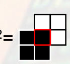
imaginea inițială A — imaginea A^1=A-(A*B^1)

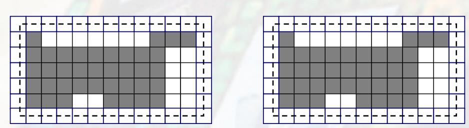
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare): B^2= 



imaginea A^1 — imaginea A^2=A^1-(A^1*B^2)

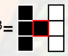
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

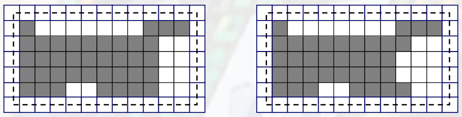
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^3=$ 



imaginea A^2 imaginea $A^3=A^2-(A^2*B^3)$

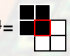
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

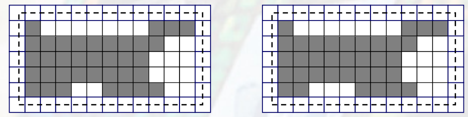
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^4=$ 



imaginea A^3 imaginea $A^4=A^3-(A^3*B^4)$

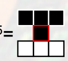
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

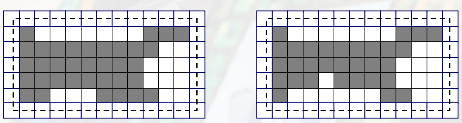
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^5=$ 



imaginea A^4 imaginea $A^5=A^4-(A^4*B^5)$

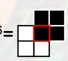
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

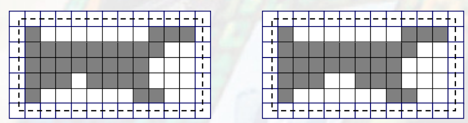
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^6=$ 



imaginea A^5 imaginea $A^6=A^5-(A^5*B^6)$

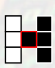
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

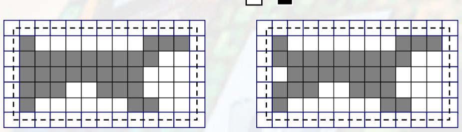
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^7=$ 



imaginea A^6 imaginea $A^7=A^6-(A^6*B^7)$

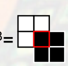
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

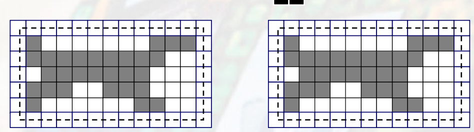
↳ transformarea de subțiere (continuare)

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A \otimes \{B\} = (...((A \otimes B^1) \otimes B^2)...) \otimes B^n$$

- exemplu (continuare):

$B^8=$ 



imaginea A^7 imaginea $A^8=A^7-(A^7*B^8)$

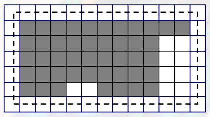
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

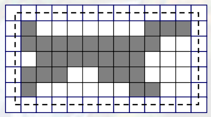
↳ **transformarea de subțiere (continuare)**

- subțierea simetrică a obiectelor (continuare)

$$A\otimes\{B\}=(...((A\otimes B^1)\otimes B^2)...)\otimes B^n$$

- exemplu (continuare):


imaginea inițială A


imaginea $A\otimes\{B\}$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **transformarea de îngroşare (thickening)**

- este transformarea duală subțierii având ca efect îngroşarea obiectelor în sensul invers subțierii,

$$A\odot B=A\cup(A*B)$$

unde *A* este mulțimea imagine (pixelii obiect), *B* este mulțimea elementului structurant iar "*" reprezintă transformarea hit or miss.

- îngroşarea simetrică se realizează după acelaşi principiu:

$$\{B\}=\{B^1,B^2,...,B^n\}$$

unde elementul structurant B^i reprezintă o rotație a lui B^{i-1} (~ dispunem de o mulțime de elemente structurante orientate)

$$A\odot\{B\}=(...((A\odot B^1)\odot B^2)...)\odot B^n$$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

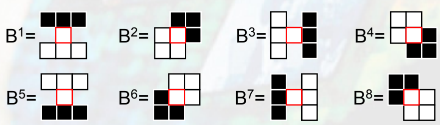
↳ **transformarea de îngroşare (continuare)**

- îngroşarea simetrică (continuare):

$$\{B\}=\{B^1,B^2,...,B^n\}$$

$$A\odot\{B\}=(...((A\odot B^1)\odot B^2)...)\odot B^n$$

Observație: pentru ca îngroşarea să aibă loc, elementele structurante sunt complementarele elementelor structurante folosite la subțiere (de regulă originea este un punct de fundal):

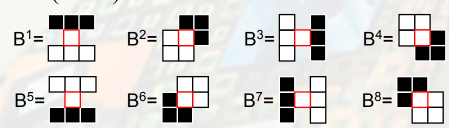


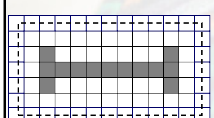
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

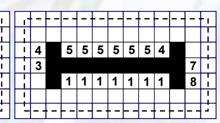
↳ **transformarea de îngroşare (continuare)**

$$A\odot B=A\cup(A*B)$$

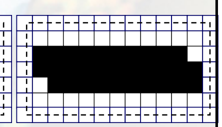
- exemplu:




imaginea inițială A bordată



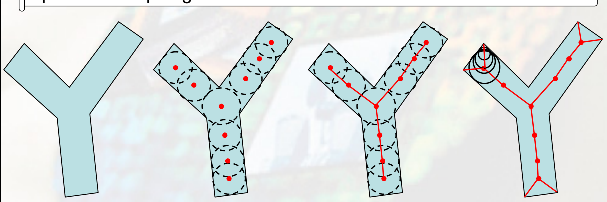
imaginea A⊙{B}


imaginea A⊙{B}

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **skeletonul morfologic**

ideal, skeletonul unui obiect este o reprezentare liniară a acestuia cu următoarele proprietăți:
- grosimea acestuia este de un pixel,
- trece prin mijlocul obiectului (echidistant față de margini),
- păstrează topologia obiectului.


exemplu obiect · discuri maximale · segmente skeleton · skeleton final

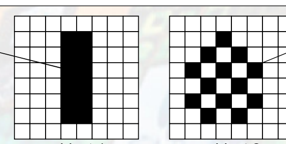
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ **skeletonul morfologic (continuare)**

- skeleton ≠ schelet în sensul biologic, dar în unele cazuri este asemănător.

- nu întotdeauna putem vorbi de skeletonul unui obiect binar:

nu putem găsi o linie de grosime 1 prin mijlocul obiectului


obiect 1 · obiect 2

nu putem elimina puncte şi totodată să păstrăm topologia obiectului

- există totuşi o serie de metode care propun construcția skeletonului unui obiect binar,

[HP ISEI]

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

dacă notăm cu rD_x un disc de rază r centrat în x, și cu $S_r(x)$ mulțimea centrelor discurilor maximale rD_x ce sunt conținute în obiectul X și care intersectează marginile obiectului în cel puțin 2 puncte, atunci skeletonul este definit astfel:

$$S(X) = \bigcup_{r>0} S_r(x)$$

$$S(X) = \bigcup_{r>0} \{(X\Theta rD) - ((X\Theta rD)^{\circ} drD)\}$$

unde Θ denotă operația de erodare, "-" reprezintă operația de scădere dintre mulțimi, "°" este operația de deschidere morfologică iar drD este un disc infinitezimal.

$$(X\Theta rD)^{\circ} drD \subset (X\Theta rD)$$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

definit în acest fel, skeletonul este *regenerativ*, obiectul X poate fi reconstituit după următoarea relație:

$$X = \bigcup_{r>0} \{S_r(x) \oplus rD\}$$

unde $\oplus$ denotă operația de dilatare.

- să transpunem în practică:

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} S_n(x) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{(X\Theta nB) - ((X\Theta nB)^{\circ} B)\}$$

unde B este elementul structurant disc minim (rază 1), $(X\Theta nB) = \overbrace{(...((X\Theta B)\Theta B)...\Theta B)}^{n\ ori}$, iar n_{max} reprezintă ultima iterație pentru care erodarea lui X este diferită de mulțimea vidă (~dimensiunea maximă a discului)

$$X = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{S_n(x) \oplus nB\}$$

[A.K. Jain]

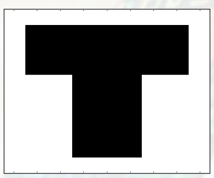
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

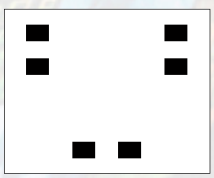
- exemplu: B= 

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{(X\Theta nB) - ((X\Theta nB)^{\circ} B)\}$$

$$X^{\circ} B = (X\Theta B) \oplus B^S$$



imaginea inițială X

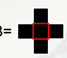


imaginea S_0

$$S_0(X) = X - (X^{\circ} B)$$

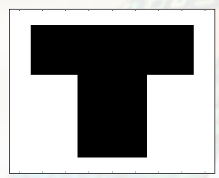
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

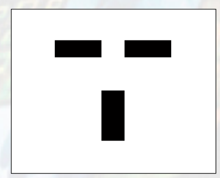
- exemplu (continuare): B= 

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{(X\Theta nB) - ((X\Theta nB)^{\circ} B)\}$$

$$X^{\circ} B = (X\Theta B) \oplus B^S$$



imaginea inițială X



imaginea S_1

$$S_1(X) = (X\Theta B) - ((X\Theta B)^{\circ} B)$$

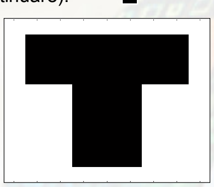
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

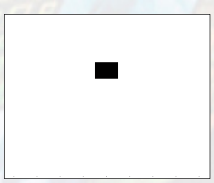
- exemplu (continuare): B= 

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{(X\Theta nB) - ((X\Theta nB)^{\circ} B)\}$$

$$X^{\circ} B = (X\Theta B) \oplus B^S$$



imaginea inițială X

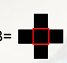


imaginea S_2

$$S_2(X) = ((X\Theta B)\Theta B) - (((X\Theta B)\Theta B)^{\circ} B)$$

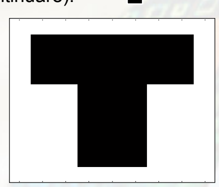
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

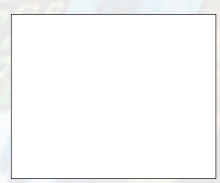
- exemplu (continuare): B= 

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^{n_{\max}} \{(X\Theta nB) - ((X\Theta nB)^{\circ} B)\}$$

$$X^{\circ} B = (X\Theta B) \oplus B^S$$



imaginea inițială X



imaginea S_3

$$S_3(X) = (((X\Theta B)\Theta B)\Theta B) - ((((X\Theta B)\Theta B)\Theta B)^{\circ} B)$$

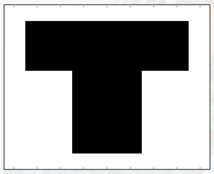
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

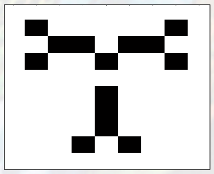
- exemplu (continuare): B= 

$$S(X)=\bigcup_{n=0}^{n_{max}}\{(X\Theta nB)-((X\Theta nB)^\circ B)\}$$

$$X^\circ B=(X\Theta B)\oplus B^S$$



imaginea inițială X

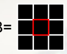


skeleton (S)

$$S(X)=S_0\cup S_1\cup S_2$$

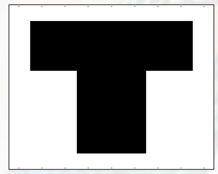
Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

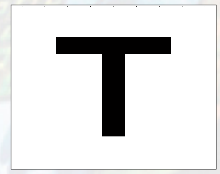
- exemplu (continuare): B= 

$$S(X)=\bigcup_{n=0}^{n_{max}}\{(X\Theta nB)-((X\Theta nB)^\circ B)\}$$

$$X^\circ B=(X\Theta B)\oplus B^S$$



imaginea inițială X



imaginea S_1=skeleton (S_2=0)

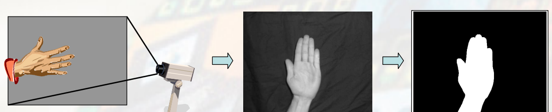
$$S_0(X)=X-(X^\circ B)=\{\}$$

$$S_1(X)=(X\Theta B)-((X\Theta B)^\circ B)$$

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

- exemplu practic: analiza poziției mâinii,



imagine înregistrată

regiune mână (vezi pag. 63-64)

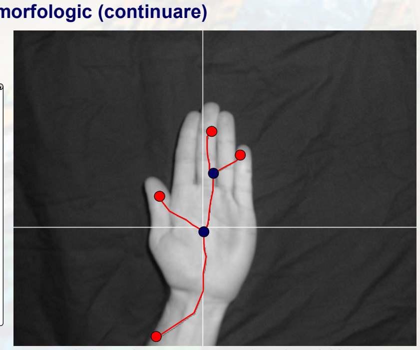
- folosim skeletonul pentru a caracteriza ipostaza mâinii în funcție de topologia acestuia.

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

- exemplu practic (continuare):

caracterizare:
-sistem de referință = centrul de greutate (+alb);
{- puncte terminale și intersecții,
-segmente și poziția acestora față de origine (cadran), etc.}
= **semnătură gest**



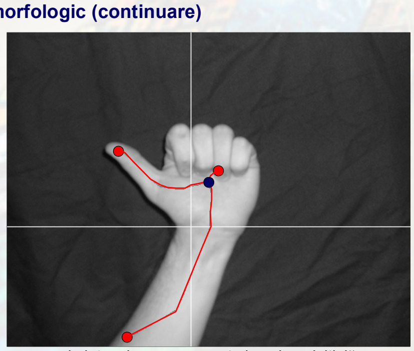
skeletonul suprapus peste imaginea inițială

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

- exemplu practic (continuare):

caracterizare:
-sistem de referință = centrul de greutate (+alb);
{- puncte terminale și intersecții,
-segmente și poziția acestora față de origine (cadran), etc.}
= **semnătură gest**



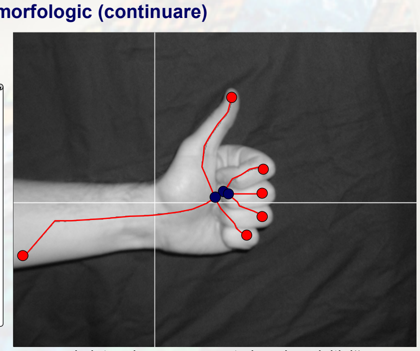
skeletonul suprapus peste imaginea inițială

Morfologie matematică imagini binare: operații compuse

↳ skeletonul morfologic (continuare)

- exemplu practic (continuare):

caracterizare:
-sistem de referință = centrul de greutate (+alb);
{- puncte terminale și intersecții,
-segmente și poziția acestora față de origine (cadran), etc.}
= **semnătură gest**



skeletonul suprapus peste imaginea inițială

7.3. Operații morfologice pentru niveluri de gri

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

- operațiile morfologice pot fi extinse şi pentru cazul imaginilor cu niveluri de gri, totuşi această extensie nu este "evidentă/naturală":

>ipoteze:

- imaginea conține obiecte cu niveluri de gri distincte față de fundalul imaginii, de asemenea reprezentat cu niveluri de gri,
- obiectele şi fundalul sunt considerate a fi relativ uniforme spațial,

soluție: imaginea cu niveluri de gri este binarizată şi apoi sunt aplicate metodele de morfologie binară, de ce să nu folosim această abordare ?

- binarizarea introduce erori semnificative în separarea obiectelor de fundal (vezi exemplul de la pagina 63),

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

soluția matematică: fie *A(x,y)* imaginea cu niveluri de gri inițială definită pe domeniul D_A şi *B(x,y)* elementul structurant definit pe domeniul D_B,

↳ **dilatarea pe niveluri de gri**

$$(A \oplus B)_{(s,t)} = \max \left\{ \begin{array}{l} A(s-x,t-y)+B(x,y) \,| \\ (s-x,t-y) \in D_A, (x,y) \in D_B \end{array} \right\}$$

cu alte cuvinte, dilatarea imaginii *A* cu elementul *B* în punctul curent *(s,t)* este dată de valoarea maximă a sumei dintre valorile pixelilor imaginii şi valorile corespunzătoare din elementul structurant.

dilatare niveluri de gri ~ *valoare maximă* din vecinătatea elementului structurant considerat, = dacă *B*=0:

$$(A \oplus B)_{(s,t)} = \max\{A(s-x,t-y) \,|\, (x,y) \in D_B\}$$

[H. Coetzer]

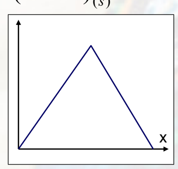
Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ **dilatarea pe niveluri de gri (continuare)**

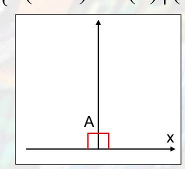
- din punct de vedere al valorilor, elementul structurant este o funcție similară imaginii, spațial păstrează convenția vecinătăților!

- exemplul caz 1D:

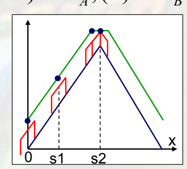
$$(A \oplus B)_{(s)} = \max\{A(s-x)+B(x) \,|\, (s-x) \in D_A, (x) \in D_B\}$$



A(x) semnal inițial



B(x) elementul structurant



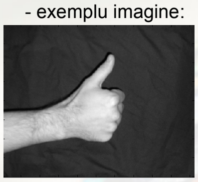
A⊕B

- efectul dilatării este similar efectului dilatării binare şi anume obiectul se măreşte,

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

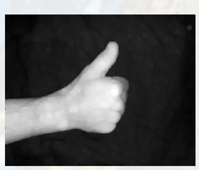
↳ **dilatarea pe niveluri de gri (continuare)**

- exemplu imagine:



imagine inițială
min=14, max=218,
val.medie= 72

dilatare disc rază 5
min=38, max=218,
val.medie=80



dilatare disc rază 7
min=41, max=218,
val.medie=82.5

- dacă valorile elementului structurant sunt pozitive, atunci imaginea devine mai luminoasă,

- se dilată obiectele, unde un obiect este o zonă din imagine mărginită de valori mai întunecate (ex. de fundal),

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ **dilatarea pe niveluri de gri (continuare)**

- exemplu imagine (continuare):

imagine inițială
min=0, max=255,
val.medie=124.5

dilatare disc rază 1
min=10, max=255,
val.medie=138

dilatare disc rază 5
min=16, max=255,
val.medie=171

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ erodarea pe niveluri de gri

$$(A\Theta B)_{(s,t)} = \min\left\{ \begin{array}{l} A(s+x,t+y) - B(x,y) \mid \\ (s+x,t+y) \in D_A, (x,y) \in D_B \end{array} \right\}$$

cu alte cuvinte, erodarea imaginii *A* cu elementul *B* în punctul curent *(s,t)* este dată de valoarea minimă a diferențelor dintre valorile pixelilor imaginii şi valorile corespunzătoare din elementul structurant.

erodare niveluri de gri ~ *valoare minimă* din vecinătatea elementului structurant considerat, = dacă *B*=0:

$$(A\Theta B)_{(s,t)} = \min\{A(s+x,t+y) \mid (x,y) \in D_B\}$$

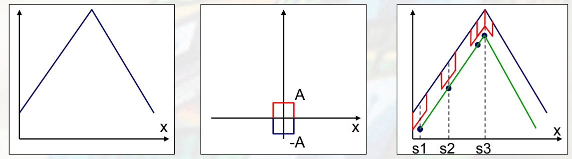
Morfologie matematică pentru niveluri de gri

[H. Coetzer]

↳ erodarea pe niveluri de gri (continuare)

- exemplu caz 1D:

$$(A\Theta B)_{(s)} = \min\{A(s+x) - B(x) \mid (s+x) \in D_A, (x) \in D_B\}$$



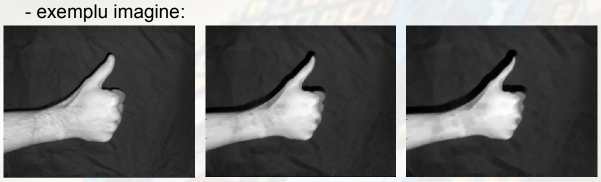
A(x) semnal inițial | B(x), -B(x) elementul structurant | AΘB

- efectul erodării este similar efectului erodării binare şi anume obiectul se subțiază,

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ erodarea pe niveluri de gri (continuare)

- exemplu imagine:



imagine inițială min=14, max=218, val.medie=72 | erodare disc rază 5 min=14, max=204, val.medie=64 | erodare disc rază 7 min=14, max=197, val.medie=61.2

- dacă valorile elementului structurant sunt pozitive, atunci imaginea devine mai întunecată,

- se erodează obiectele, unde un obiect este o zonă din imagine mărginită de valori mai întunecate (ex. de fundal),

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

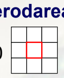
↳ erodarea pe niveluri de gri (continuare)

- exemplu imagine (continuare):

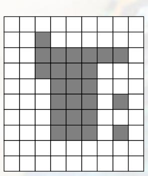
imagine inițială, val.medie=124.5 | erodare disc rază 1, val.medie=111.2 | erodare disc rază 5, val.medie=81.2

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ dilatarea şi erodarea pe niveluri de gri

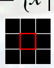
- cazuri limită, B=0  , imagine binară:

$$(A \oplus B)_{(s,t)} = \max\{A(s-x,t-y) \mid (x,y) \in D_B\}$$



imaginea inițială A

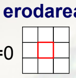
$\Longleftrightarrow$ $A \oplus B = \{x \mid B_x \cap A \neq \varnothing\}$

unde B= 

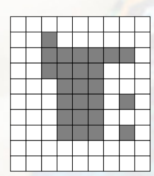
returnează valoarea maximă din vecinătatea lui B, şi anume 1 dacă vecinătatea atinge obiectul din imagine

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ dilatarea şi erodarea pe niveluri de gri (continuare)

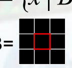
- cazuri limită, B=0  , imagine binară:

$$(A\Theta B)_{(s,t)} = \min\{A(s+x,t+y) \mid (x,y) \in D_B\}$$



imaginea inițială A

$\Longleftrightarrow$ $A\Theta B = \{x \mid B_x \subset A\}$

unde B= 

returnează valoarea minimă din vecinătatea lui B, şi anume 0 dacă vecinătatea nu este inclusă total în obiectul din imagine

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

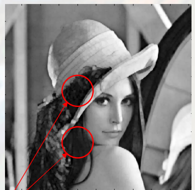
↳ deschiderea pe niveluri de gri

$A^\circ B = (A\Theta B)\oplus B^S$ → evident, aceeaşi definiţie ca şi în cazul binar.

- caz limită, *B*=0: $(A^\circ B)_{(s,t)} = \max_{(x,y)\in B}\{\min_{(x,y)\in B}\{A(s-x,t-y)\}\}$


imagine iniţială


deschidere disc rază 1


deschidere disc rază 3

- *efect general*: sunt eliminate obiectele luminoase mai mici decât elementul structurant.

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

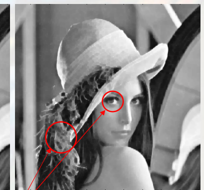
↳ închiderea pe niveluri de gri

$A\bullet B = (A\oplus B)\Theta B^S$

- caz limită, *B*=0: $(A\bullet B)_{(s,t)} = \min_{(x,y)\in B}\{\max_{(x,y)\in B}\{A(s-x,t-y)\}\}$


imagine iniţială


închidere disc rază 1


închidere disc rază 3

- *efect general*: sunt eliminate obiectele întunecate mai mici decât elementul structurant.

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ netezirea morfologică

- deschidere + închidere: $(A^\circ B)\bullet B$
- închidere + deschidere: $(A\bullet B)^\circ B$


imagine cu zgomot impulsiv


deschidere+închidere cu disc rază 1


închidere+deschidere cu disc rază 1

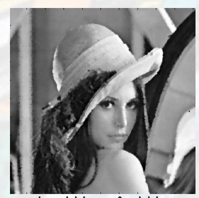
- *efect general*: sunt înlăturate/atenuate atât obiectele închise cât şi obiectele deschise mai mici decât elementul structurant (ex. zgomot).

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ netezirea morfologică (continuare)

- deschidere + închidere: $(A^\circ B)\bullet B$
- închidere + deschidere: $(A\bullet B)^\circ B$


imagine cu zgomot impulsiv


deschidere+închidere cu disc rază 2


închidere+deschidere cu disc rază 2

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

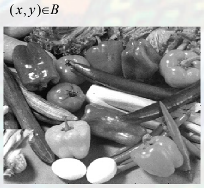
↳ gradient morfologic

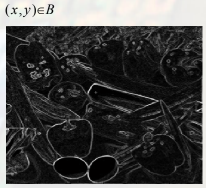
$g = (A\oplus B)-(A\Theta B)$: din imaginea dilatată se extrage imaginea erodată,

- caz limită (*B*=0):

$$g_{(s,t)} = \max_{(x,y)\in B}\{A(s-x,t-y)\} - \min_{(x,y)\in B}\{A(s+x,t+y)\}$$

→ L-filtru de derivare max-min (vezi Cursul 6)


imagine iniţială


(dilatare – erodare) cu disc de rază 1

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

↳ transformarea Top-Hat

→ white Top-Hat:

$A-(A^\circ B)$: din imaginea iniţială *A* se extrage imaginea deschisă cu elementul structurant *B*

→ black Top-Hat:

$(A\bullet B)-A$: din imaginea închisă cu elementrul structurant *B* se extrage imaginea iniţială *A*

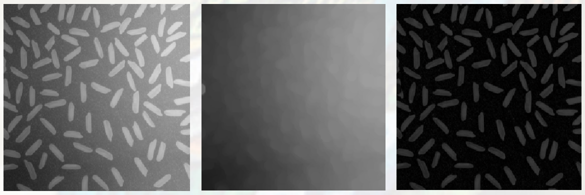
efect global: eliminarea tranziţiilor lente şi astfel creşterea contrastului anumitor regiunii ale imaginii.

Morfologie matematică pentru niveluri de gri

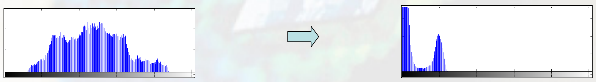
[Matlab]

↳ **transformarea Top-Hat (continuare)**

- exemplu practic: $A-(A \circ B)$



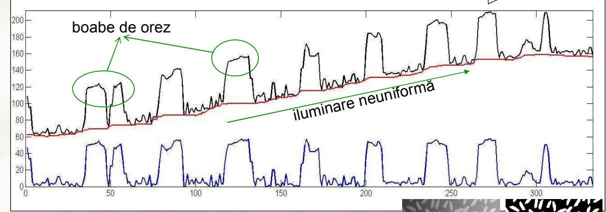
imaginea inițială cu luminozitate variabilă | dechidere cu disc rază 9 | Top-Hat disc rază 9



Morfologie matematică pentru niveluri de gri

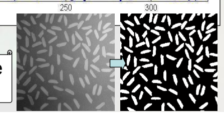
↳ **transformarea Top-Hat (continuare)**

- exemplu practic (continuare)



profilul liniei 70 din imaginea anterioară

- permite extragerea obiectelor contrastante față de fundal în ciuda variațiilor intensității.

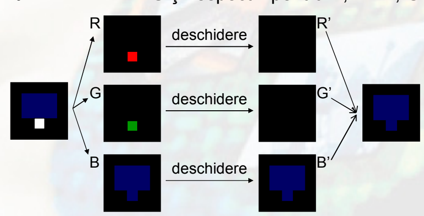


7.4. Operații morfologice vectoriale

Morfologie matematică pentru imagini color

- operațiile morfologice pot fi extinse şi pentru cazul imaginilor color, unde valorile pixelilor nu sunt scalare ci vectoriale (ex. [R,G,B], [C,M,Y], etc.)

abordare marginală: - aplicăm transformarea morfologică fiecărei componente de culoare, de exemplu pentru R, pentru G şi respectiv pentru B, → R', G', B'



- limitare: pot fi eliminate părți din obiecte doar în anumite plane de culoare şi păstrate în celelalte.

[A. Asano]

Morfologie matematică pentru imagini color

abordare vectorială: - folosim principiul morfologiei pe niveluri de gri unde operațiile erau definite ca maxime şi minime pe mulțimi, ceea ce corespunde la limită cazului binar.

- acest lucru este posibil doar dacă putem defini conceptul de maxim şi minim pentru orice submulțime a spațiului vectorial considerat.

- o anumită relație "≤" introduce o ordonare totală sau parțială a mulțimii X dacă:

$$\begin{cases} \forall x \in X, x \le x & \text{(reflexivitate)} \\ \forall x, y \in X, x = y \text{ daca } x \le y, y \le x & \text{(anti-simetrie)} \\ \forall x, y, z \in X, x \le z \text{ daca } x \le y, y \le z & \text{(tranzitivitate)} \end{cases}$$

Morfologie matematică pentru imagini color

câteva definiții:

- mulțimea X este **semi-ordonată** dacă ordonarea este definită doar pentru anumite perechi de elemente,
- mulțimea X este **ordonată total** dacă ordonarea este definită pentru oricare pereche de elemente (elementele formează o secvență liniară ordonată, ex. nivelurile de gri).
- mulțimea elementelor din X "≥" / "≤" decât toate elementele dintr-o submulțime A din X, reprezintă **limita superioară** / **inferioară** a lui A.
- *minimul / maximul* limitei superioare / inferioare se numeşte **supremum** / **infimum** al lui A.

- morfologia matematică necesită o astfel de structură matematică în care există o relație de ordine şi în care există un sup şi un inf **= lattice**

Morfologie matematică pentru imagini color

- modalități de definire a unei relații de ordine între culori (vezi median color Cursul 6):

- distanță cumulativă:

$$D_k = \sum_{i=1}^{K} \| A_k - A_i \|, k = 1,\dots,K \text{ unde } \{A_1,\dots,A_K\} \text{ este setul de vectori}$$

- unghi cumulat:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{K} \angle(A_k, A_i)$$

- distanță şi unghi:

$$\Omega_k = D_k^{1-w} \cdot \alpha_k^w$$

- distanță față de un punct de referință (ex. vector mediu,...),

$$D_k = \| A_k - R \|$$

- amestecul biților (ordonare totală).

Morfologie matematică pentru imagini color

- având la dispoziție un sup şi un inf putem defini operațiile morfologice în sensul max/min (vezi cazul nivelurilor de gri).

- exemple abordare marginală (element structurant pătrat 7x7, spațiu RGB):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

[P. Lambert, J. Chanussot]

Morfologie matematică pentru imagini color

- exemple abordare marginală (element structurant pătrat 7x7, spațiu HSI):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

[P. Lambert, J. Chanussot]

Morfologie matematică pentru imagini color

- exemple abordare marginală (element structurant pătrat 7x7, componentă de intensitate I din HSI):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

[P. Lambert, J. Chanussot]

Morfologie matematică pentru imagini color

- exemple abordare vectorială (element structurant pătrat 7x7, distanță cumulată):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

- rezultate slabe datorate în principal instabilității valorii sup (variații mici de culoare pot conduce la valori complet diferite ale lui sup)

[P. Lambert, J. Chanussot]

Morfologie matematică pentru imagini color

- exemple abordare vectorială (element structurant pătrat 7x7, distanță la un punct de referință):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

- nu sunt introduse culori false deoarece ieşirea este o valoare din imagine dar elementul structurant este mai vizibil.

[P. Lambert, J. Chanussot]

Morfologie matematică pentru imagini color

- exemple abordare vectorială (element structurant pătrat 7x7, amestecul biților):

imagine inițială (Edvard Munch) | deschidere morfologică (elim. obiecte luminoase) | închidere morfologică (elim. obiecte întunecate)

- nu sunt introduse culori false deoarece ieşirea este o valoare din imagine dar elementul structurant este mai vizibil.

[P. Lambert, J. Chanussot]

Sfârşit Curs