

Universitatea "Politehnica" din București
Facultatea de Electronică, Telecomunicații și
Tehnologia Informației

Tehnici Avansate de Prelucrarea și Analiza Imaginilor

Curs 8 – Transformări integrale

Ș.I. Bogdan IONESCU
Prof. Constantin VERTAN
Conf. Mihai CIUC

Master SIVA - Sisteme Inteligente și Vedere Artificială

2010-2011

Plan Curs 8 – Transformări integrale

- 8.1. Introducere
- 8.1. Transformări unitare
- 8.2. Transformata Fourier, Cosinus și Sinus

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

1

8.1. Introducere

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

2

De ce să transformăm imaginea ?

- o imagine în sensul clasic furnizează informații vizuale, spațiale de vecinătate între pixeli:

→din punct de vedere spațial (coordonate) observăm 5 obiecte luminoase pe un fond întunecat, asemănătoare unor bare verticale:
informație= 176 x 176 x 8 biți = 30.25kB

- totuși, anumite informații nu sunt disponibile direct în domeniul de definiție inițial al imaginii:

→ imaginea poate fi interpretată ca o oscilație sinusoidală (frecvențial):
informație≈ frecvență + amplitudine + DC (eventual)

→ de asemenea, din punct de vedere al contururilor putem identifica o succesiune de drepte
informație≈ (ecuație dreaptă+intensitate) x nr.drepte

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

3

Definiție operații integrale

$$B(l,c) = T_{(l,c)}(A)$$

noua valoare a oricărui pixel din imaginea prelucrată $B(x,y)$ rezultă din combinarea valorilor tuturor pixelilor din imaginea inițială $A(x,y)$.

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

4

8.2. Transformări unitare

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

5

Transformări 2D ortogonale și unitare

- termenul de transformare integrală a imaginii se referă în general la o clasă de matrice de transformare ce permit dezvoltarea în serie a imaginii.

→ de exemplu:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

imaginea U

bază matrice transformare

$$U(0,0) = 4 \cdot A_{1,1}(0,0) + 1 \cdot A_{1,2}(0,0) - 1 \cdot A_{2,1}(0,0) + 2 \cdot A_{2,2}(0,0)$$

...

$$U(1,1) = 4 \cdot A_{1,1}(1,1) + 1 \cdot A_{1,2}(1,1) - 1 \cdot A_{2,1}(1,1) + 2 \cdot A_{2,2}(1,1)$$

Transformări 2D ortogonale și unitare

- aceste matrice ale transformării nu sunt alese aleator, ci similar unui sistem de coordonate, acestea trebuie să aibă o serie de proprietăți...

- în cazul general această dezvoltare poate fi scrisă ca:

$$U(m,n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}^*(m,n) \cdot V(k,l)$$

unde U reprezintă imaginea de dimensiune $N \times N$ (pentru exemplificare considerăm cazul particular), $0 \leq m, n \leq N-1$, $\{a_{k,l}(m,n)\}$ definesc transformarea imaginii fiind un set de funcții discrete de bază, $0 \leq k, l \leq N-1$ iar $V(k,l)$ sunt coeficienții dezvoltării în serie.
(* reprezintă complex-conjugatul)

- transformarea este caracterizată de N^4 coeficienți, $a_{k,l}(m,n)$ cu $k, l, m, n = 0, \dots, N-1$, ce reprezintă nucleul transformării.

Transformări 2D ortogonale și unitare

[A.K. Jain]

- dacă funcțiile de bază, $\{a_{k,l}(m,n)\}$, îndeplinesc condițiile de:

a. orthonormalitate:

$$\sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot a_{k',l'}^*(m,n) = \delta(k-k', l-l'), \quad \forall k, l, k', l'$$

→ asigură faptul că orice dezvoltare trunchiată minimizează eroarea pătratică de aproximare:

$$U_{P,Q}(m,n) = \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{Q-1} a_{k,l}^*(m,n) \cdot V(k,l), \quad P, Q < N$$

$$\sigma_e^2 = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [U(m,n) - U_{P,Q}(m,n)]^2 \rightarrow \min$$

- dacă $P=Q=N$ atunci eroarea este 0.

Transformări 2D ortogonale și unitare

[A.K. Jain]

- dacă funcțiile de bază, $\{a_{k,l}(m,n)\}$, îndeplinesc condițiile de: (continuare)

b. completitudine:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot a_{k,l}^*(m',n') = \delta(m-m', n-n')$$

→ asigură faptul că baza de funcții este completă.

- atunci dezvoltarea inversă se poate scrie ca:

$$V(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot U(m,n)$$

unde $V=\{V(k,l) | 0 \leq k, l \leq N-1\}$ reprezintă imaginea transformată, $V(k,l)$ fiind coeficienții transformării.

Transformări unitare separabile

[A.K. Jain]

$$V(k,l) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_{k,l}(m,n) \cdot U(m,n)$$

- se poate observa că pentru calculul coeficienților transformării sunt efectuate N^4 înmulțiri → $\sim O(N^4)$ Ț

→ mai avantajos este să considerăm transformarea separabilă:

$$a_{k,l}(m,n) = a_k(m) \cdot b_l(n) = a(k,m) \cdot b(l,n)$$

unde $\{a_k(m) | k=0, \dots, N-1\}$ și $\{b_l(n) | l=0, \dots, N-1\}$ reprezintă seturi de vectori (de bază) ai transformării.

- impunerea condițiilor de orthonormalitate și completitudine conduce la necesitatea ca matricele $A=\{a(k,m)\}$ și $B=\{b(l,n)\}$ să fie unitare:

$$A \cdot A^{*T} = A^T \cdot A^* = I_N, \quad B \cdot B^{*T} = B^T \cdot B^* = I_N \quad \text{unde } ^T \text{ este transpusa, iar } I_N \text{ matricea unitate.}$$

Transformări unitare separabile

[A.K. Jain]

- folosind această formă, transformarea directă și inversă se poate exprima ca produs matriceal astfel:

$$V = A \cdot U \cdot B^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot B^*$$

unde U este imaginea inițială iar V este imaginea transformată.

- în acest fel, complexitatea de calcul este redusă cu un ordin de măsură la $\sim O(N^3)$.

- în practică, pe lângă condiția de separabilitate, matricele transformărilor se aleg în așa fel încât $A=B$, ceea ce conduce la o transformare simetrică:

$$V = A \cdot U \cdot A^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot A^*$$

Transformări unitare separabile

[A.K. Jain]

- și mai departe: $V^T = A \cdot (A \cdot U)^T$

→ transformarea se poate realiza cu transformări unidimensionale, succesiv, mai întâi pe fiecare coloană a lui U și apoi rezultatul pe fiecare linie (sau viceversa):

$$V(k, l) = \sum_{m=0}^{N-1} a(k, m) \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} U(m, n) \cdot a(l, n) \right]$$

Imaginile de bază ale transformării $U(m, n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} a_{k,l}^*(m, n) \cdot V(k, l)$

- matriceal transformarea se poate scrie:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k, l)$$

unde U reprezintă imaginea de dimensiune $N \times N$ iar $\{A_{k,l}\}$ reprezintă baza de imagini a transformării (vezi exemplul de pag 6), cu $k, l = 0, \dots, N-1$.

Imaginile de bază ale transformării

[A.K. Jain]

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k, l)$$

- cu alte cuvinte, transformarea imaginii înseamnă proiectarea acesteia (dată de coeficienții V) pe o **bază de imagini**.

- trecerea de la forma: $V^T = A \cdot (A \cdot U)^T$ la baza de imagini se face în felul următor:

$$A_{k,l}^* = a_k^* \cdot a_l^{*T}$$

unde a_k^* reprezintă coloana k a matricei A^T .

- exemplu:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A \cdot A^{*T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

imaginea matricea transformării unitară ?

Imaginile de bază ale transformării

[A.K. Jain]

- exemplu (continuare):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- care este imaginea transformată ?

$$V = A \cdot U \cdot A^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

- care este baza de imagini a transformării ($A_{k,l}, k, l = 0, 1$) ?

$$A_{0,0}^* = a_0^* \cdot a_0^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{0,1}^* = a_0^* \cdot a_1^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Imaginile de bază ale transformării

[A.K. Jain]

- exemplu (continuare): $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

- care este baza de imagini a transformării ($A_{k,l}, k, l = 0, 1$) ?

$$A_{1,0}^* = a_1^* \cdot a_0^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1}^* = a_1^* \cdot a_1^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- verificăm:

$$U = \sum_{k=0}^1 \sum_{l=0}^1 A_{k,l}^* \cdot V(k, l) = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = ?$$

Proprietățile transformărilor unitare 1D

[A.K. Jain]

- pentru exemplificare vom considera cazul unidimensional, fie semnalul de intrare u (vector de dimensiune N), și transformata sa v obținută prin matricea unitară A (dimensiune $N \times N$):

$$v = A \cdot u$$

a. conservarea energiei:

$$\left. \begin{aligned} E_v &= \|v\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |v(k)|^2 = v^{*T} \cdot v \\ E_u &= \|u\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^2 = u^{*T} \cdot u \end{aligned} \right\} E_v = E_u$$

$$E_v = v^{*T} \cdot v = (A \cdot u)^{*T} \cdot A \cdot u = u^{*T} \cdot A^{*T} \cdot A \cdot u = u^{*T} \cdot I \cdot u = E_u$$

- energia înseamnă de fapt lungimea Euclidiană în spațiul N dimensional, conservare energie = conservare lungime,
→ transformarea este o rotație a lui u în spațiul semnalului,
→ baza lui u este rotită iar v reprezintă proiecția lui u pe noua bază.

Proprietățile transformărilor unitare 1D

[A.K. Jain]

b. compactarea energiei:

- media semnalului v este proporțională cu cea a lui u :

$$\mu_v = \bar{v} = \overline{A \cdot u} = A \cdot \mu_u$$

- energia medie a semnalului se conservă:

$$\overline{E_v} = \overline{v^{*T} \cdot v} = \overline{v^{*T}} \cdot \bar{v} = (\overline{A \cdot u})^{*T} \cdot \overline{A \cdot u}$$

$$\overline{E_v} = \overline{u^{*T} \cdot A^{*T} \cdot A \cdot u} = \overline{u^{*T}} \cdot \overline{I \cdot u} = \overline{E_u}$$

- matricea de covariație:

$$R_v = \overline{(v - \mu_v) \cdot (v - \mu_v)^{*T}} = \begin{bmatrix} \overline{(v_0 - \mu_v)^2} & \dots & \overline{(v_0 - \mu_v) \cdot (v_{N-1} - \mu_v)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{(v_{N-1} - \mu_v) \cdot (v_0 - \mu_v)} & \dots & \overline{(v_{N-1} - \mu_v)^2} \end{bmatrix}$$

varianțe corelație

Proprietățile transformărilor unitare 1D

[A.K. Jain]

b. compactarea energiei (continuare):

$$\left. \begin{aligned} R_v &= \overline{(v - \mu_v) \cdot (v - \mu_v)^{*T}} \\ R_v &= \overline{(A \cdot u - A \cdot \mu_u) \cdot (A \cdot u - A \cdot \mu_u)^{*T}} \\ R_v &= \overline{A \cdot (u - \mu_u) \cdot (u - \mu_u)^{*T} \cdot A^{*T}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} R_v &= A \cdot R_u \cdot A^{*T} \\ &\rightarrow \text{corelația} \\ &\text{componentelor se} \\ &\text{modifică.} \end{aligned}$$

- suma varianțelor se conservă:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sigma_v^2(k) = \text{Tr}[A \cdot R_u \cdot A^{*T}] = \text{Tr}[R_u] = \sum_{l=0}^{N-1} \sigma_u^2(l)$$

unde $\text{Tr} = \text{trace}$ iar $\text{Tr}[ABC] = \text{Tr}[CAB] = \text{Tr}[BCA]$ dacă matricele sunt pătrate.

Proprietățile transformărilor unitare 1D

b. compactarea energiei (continuare):

- majoritatea transformărilor unitare au tendința de a aglomera o mare parte a energiei medii a semnalului inițial în doar câțiva coeficienți ai transformării,
- energia se conservă, deci o mare parte a coeficienților sunt de energie mică,
- energia medie a coeficienților tinde să fie distribuită neuniform.

c. decorare:

- dacă elementele vectorului inițial, u , sunt puternic corelate, în urma unei transformări unitare elementele vectorului rezultat tind să fie decorate:
- semnalul decorat ~ matricea de covarianță diagonală!
- decorare ~ elementele de pe diagonalele secundare <<.

d. entropia unui vector cu componente aleatoare se conservă.

8.3. Transformata Fourier, Cosinus și Sinus

Numere complexe (review)

- reprezentarea numerelor complexe:

$$(a, b) \leftrightarrow a + j \cdot b$$

$$(a, b) \leftrightarrow R \cdot \cos \alpha + j \cdot R \cdot \sin \alpha$$

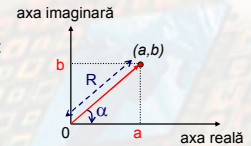
- amplitudine și fază:

$$a + j \cdot b = R \cdot e^{j\alpha} \begin{cases} R = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

- notații:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha), \quad e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j \cdot \sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}), \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{2 \cdot j} \cdot (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$



Transformata Fourier 1D continuă (review)

- descompunerea unui semnal periodic $f(x)$ (dacă ne-periodic, considerăm $T \rightarrow \infty$) în armonice se realizează pe baza transformatei Fourier astfel:

$$\mathfrak{F}[f(x)] = F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-2\pi j v x} dx$$

unde v este frecvența reală.

- și transformata inversă:

$$\mathfrak{F}^{-1}[F(v)] = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(v) \cdot e^{2\pi j v x} dv$$

unde x reprezintă coordonatele spațiale.

- sau altfel scris:

$$\left\{ \begin{aligned} |F(v)| &= \sqrt{\text{Re}^2(v) + \text{Im}^2(v)} \\ \phi(v) &= \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(v)}{\text{Re}(v)}\right) \end{aligned} \right. \text{ unde } \text{Re} \text{ și } \text{Im} \text{ sunt părțile reale și imaginare ale lui } F.$$

Transformata Fourier 1D continuă (review)

- câteva proprietăți de bază, notăm: $f(x) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} F(v)$, $g(x) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} G(v)$

$$\mathfrak{F}[\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)] = \lambda \cdot F(v) + \mu \cdot G(v)$$

$$\mathfrak{F}[f(a \cdot x)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{v}{a}\right)$$

$$\mathfrak{F}[f(x - x_0)] = e^{-2\pi j v x_0} F(v), \quad \mathfrak{F}^{-1}[F(v - v_0)] = e^{2\pi j v_0 x} f(x)$$

$$\mathfrak{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (2\pi j v)^n \cdot F(v)$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(v), \quad \delta(x) \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} 1$$

$$u(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 0.5 \\ 0 & \text{rest} \end{cases} \xleftrightarrow{\mathfrak{F}} \frac{\sin(\pi v)}{\pi v} = \text{sinc}(v) \quad \dots$$

Transformata Fourier 1D discretă (review)

- pornind de la semnalul continuu $f(x)$, semnalul discret se obține prin eșantionare astfel:

$$u(m) = f(x_0 + m \cdot \Delta x)$$

unde x_0 reprezintă coordonata de la care începe eșantionarea (uzual $x_0=0$), Δx este pasul de eșantionare iar $m=0, \dots, N-1$ reprezintă coordonata discretă.

- transformata Fourier discretă, $v(k)$, devine:

$$v(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cdot e^{-\frac{2\pi j m k}{N}}$$

unde $k=0, \dots, N-1$ reprezintă frecvența discretă.

- și transformata inversă:

$$u(m) = \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot e^{\frac{2\pi j m k}{N}}$$

unde $m=0, \dots, N-1$ reprezintă coordonata discretă.

Transformata Fourier 1D discretă unitară

- dacă facem legătura cu transformările integrale, transformata Fourier discretă unitară se poate scrie astfel:

$$\left. \begin{aligned} v(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cdot W_N^{km} \\ u(m) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \cdot W_N^{-km} \end{aligned} \right\} \text{unde } W_N = e^{-\frac{2\pi j}{N}}$$

- unde matricea transformării este dată de funcțiile discrete:

$$M_N = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{km} \right\}, 0 \leq k, m \leq N-1$$

- iar transformarea se scrie matriceal astfel:

$$v = M_N \cdot u$$

Transformata Fourier 2D discretă unitară

- extinzând la funcții discrete de două variabile putem scrie:

$$v(k, l) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} u(m, n) \cdot W_N^{km} \cdot W_N^{ln}$$

unde $u(m, n)$, cu $m, n=0, \dots, N-1$ reprezintă imaginea iar $v(k, l)$, $k, l=0, \dots, N-1$ reprezintă coeficienții descompunerii (transformata Fourier).

$$u(m, n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} v(k, l) \cdot W_N^{-km} \cdot W_N^{-ln}$$

- se poate observa că transformata Fourier 2D este separabilă !

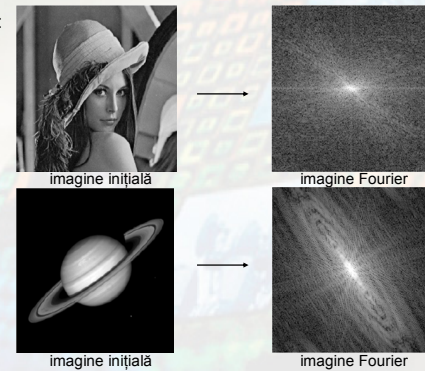
- matriceal aceasta devine:

$$V = M_N \cdot U \cdot M_N \text{ unde } M_N \text{ este matricea transformării definită anterior.}$$

$$U = M_N^* \cdot V \cdot M_N^*$$

Transformata Fourier 2D discretă unitară

- exemple:



Transformata Fourier 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

simetrică și unitară

- dacă imaginea $U(N \times N)$ și imaginea transformată $V(N \times N)$ sunt convertite în vectorii u și respectiv v (parcurete linie cu linie) atunci:

$$v = \mathfrak{Z} \cdot u \text{ și } u = \mathfrak{Z}^* \cdot v \text{ unde } \mathfrak{Z} = M_N \otimes M_N \text{ (produs Kronecker) reprezintă matricea transformatei Fourier 2D.}$$

$$\left\{ A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{0,0} \cdot B & \dots & a_{0,N-1} \cdot B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{N-1,0} \cdot B & \dots & a_{N-1,N-1} \cdot B \end{bmatrix} \right\} \text{ în acest caz } A \text{ și } B \text{ sunt matrice } N \times N.$$

- $\mathfrak{Z}$ este de dimensiune $N^2 \times N^2$ (M_N este $N \times N$) și este o matrice simetrică unitară:

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^T \text{ și } \mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}^{-1}$$

Transformata Fourier 2D discretă unitară

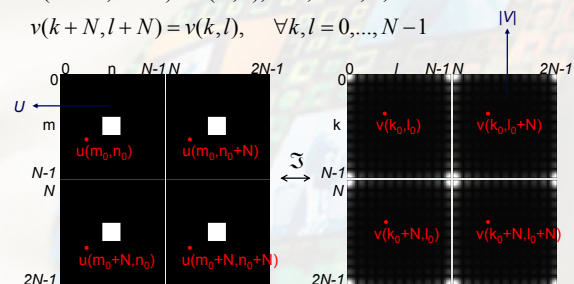
[M. Mignotte]

extensia periodică

- extensia spectrului DFT în afara domeniului inițial se face prin periodizare:

$$u(m + N, n + N) = u(m, n), \quad \forall m, n = 0, \dots, N-1$$

$$v(k + N, l + N) = v(k, l), \quad \forall k, l = 0, \dots, N-1$$



Transformata Fourier 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

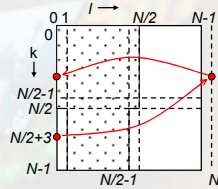
simetrie conjugată

- dacă matricea U ($N \times N$) are valori reale (ex. imagine) atunci V (transformata Fourier) este complex conjugată față de mijloc:

$$v\left(\frac{N}{2} \pm k, \frac{N}{2} \pm l\right) = v^*\left(\frac{N}{2} \mp k, \frac{N}{2} \mp l\right), \quad 0 \leq k, l \leq \frac{N}{2} - 1$$

- cu alte cuvinte există o serie de coeficienți $v(k, l)$ ce determină pe toți ceilalți prin complex conjugare (vezi zonă hașurată) →

$$v\left(\frac{N}{2} + 3, 0\right) = v^*\left(\frac{N}{2} - 3, \frac{N}{2} + \frac{N}{2}\right)$$



Transformata Fourier 2D discretă unitară

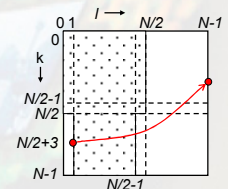
simetrie conjugată (continuare)

- dacă matricea U ($N \times N$) are valori reale (ex. imagine) atunci V (transformata Fourier) este complex conjugată față de mijloc:

$$v\left(\frac{N}{2} \pm k, \frac{N}{2} \pm l\right) = v^*\left(\frac{N}{2} \mp k, \frac{N}{2} \mp l\right), \quad 0 \leq k, l \leq \frac{N}{2} - 1$$

- alt exemplu:

$$v\left(\frac{N}{2} + 3, 1\right) = v^*\left(\frac{N}{2} - 3, \frac{N}{2} + \frac{N}{2} - 1\right)$$



Transformata Fourier 2D discretă unitară

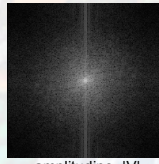
vizualizare spectru Fourier

- matricea V a coeficienților Fourier este de regulă o matrice complexă, astfel:

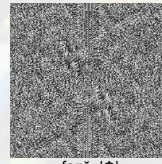
$$v(k, l) = |v(k, l)| \cdot e^{j\phi(k, l)}$$



imagine U



amplitudine, $|V|$

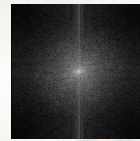


fază, $|\Phi|$

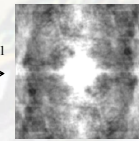
- în practică se folosește doar imaginea de amplitudine, din acest motiv în toate imaginile anterioare am ilustrat doar $|V|$.

Transformata Fourier 2D discretă unitară

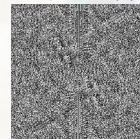
vizualizare spectru Fourier (continuare)



amplitudine, $|V|$



→ coeficientul de amplitudine indică "cât de mult" dintr-o componentă de o anumită frecvență este prezent în imagine,



fază, $|\Phi|$

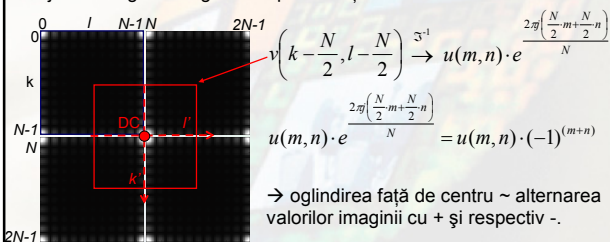


→ coeficientul de fază indică "unde" se află acea componentă în imagine.

Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)

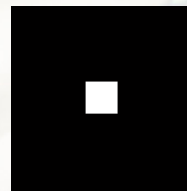
- pentru a păstra convenția generală de reprezentare a spectrelor de frecvență, componenta continuă DC ($v(0,0)$) se reprezintă în mijlocul imaginii → oglindire spectru față de centru:



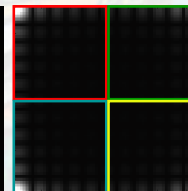
Transformata Fourier 2D discretă unitară

vizualizare spectru Fourier (continuare)

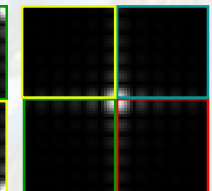
- componenta continuă DC ($v(0,0)$) în centru:



imagine U



amplitudine, $|V|$



amplitudine oglindită

vizualizare spectru Fourier (continua)

Figure 1 shows three visualizations of the input image U . The left image is the original image U , which is a white square on a black background. The middle image shows the amplitude $|V|$, which is a bright spot on a dark background. The right image shows the phase, which is a grid-like pattern. The phase is labeled as $\text{arg}(V)$ and the amplitude is labeled as $|V|$. The phase is also labeled as $\text{constanță de normalizare } [0:255]$.

baza de imagini a transformatei

$$\left. \begin{aligned} V &= M_{\mathfrak{z}} \cdot U \cdot M_{\mathfrak{z}} \\ M_{\mathfrak{z}} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{km} \right\}, 0 \leq k, m \leq N-1 \\ W_N &= e^{\frac{2\pi j}{N}} \\ U &= M_{\mathfrak{z}}^* \cdot V \cdot M_{\mathfrak{z}}^* \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k, l) \\ A_{k,l}^* &= \phi_k^* \cdot \phi_l^{*T} \text{ unde } \phi_k^* \text{ reprezintă coloana} \\ &\text{k a matricei } M_{\mathfrak{z}}^{*T}. \\ \Rightarrow A_{k,l}^* &= \frac{1}{N} \left\{ W_N^{-(k+m+l)n} \right\} \\ &\text{unde } m, n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

baza de imagini a transformatei (continua) $A_{k,l}^*$

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \frac{1}{N} \left\{ e^{\frac{2\pi j}{N}(k \cdot m + l \cdot n)} \right\}$$

- frecvență orizontală $1/N$
- frecvență orizontală și verticală $1/N$
- frecvență verticală $2/N$

* sunt frecvențe reduse.

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

baza de imagini a transformatei (continua) $A_{k,l}^*$

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \frac{1}{N} \left\{ e^{\frac{2\pi j}{N}(k \cdot m + l \cdot n)} \right\}$$

k componenta imaginară (sin, $N=64$)

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

teorema convoluției

$$u_2(m,n) = \sum_{m'=0}^{M-1} \sum_{n'=0}^{M-1} w(m',n') \cdot u_1(m-m',n-n')$$
$$\Rightarrow v_2(k, l) = w_3(k, l) \cdot v_1(k, l)$$

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

teorema convoluției (continuare)

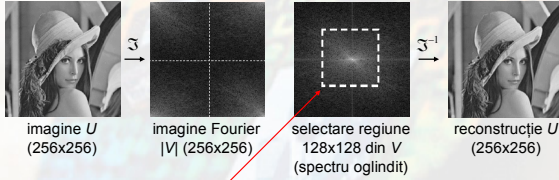
The diagram shows two square matrices, U_1 and W , both of size $(N+M-1) \times (N+M-1)$. U_1 has a white square block of size $N \times N$ in the top-left corner, and the rest of the matrix (the bottom row and right column) is light blue. W has a black square block of size $M \times M$ in the top-left corner, and the rest of the matrix is light blue. A double-headed arrow labeled "product" points from U_1 to W , indicating the operation being performed.

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

Transformata Fourier 2D discretă unitară

compactarea energiei

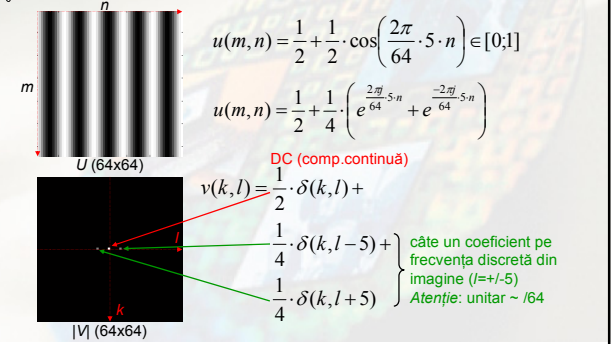
- fiind vorba de o transformare unitară aceasta are proprietatea de compactare a energiei în cât mai puțini coeficienți ai transformării (vezi pagina 17),



- zona selectată din spectru contribuie la doar 68.7% din energia totală a imaginii → **compactare redusă** !

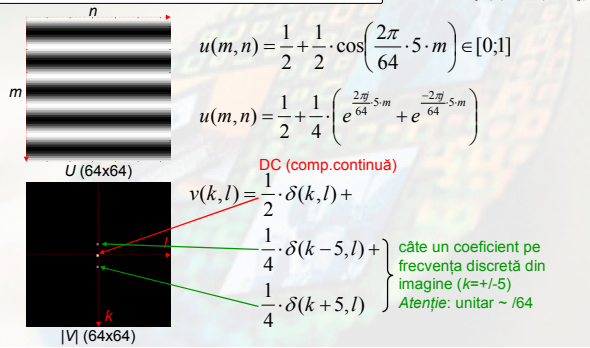
Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: orientare și frecvență



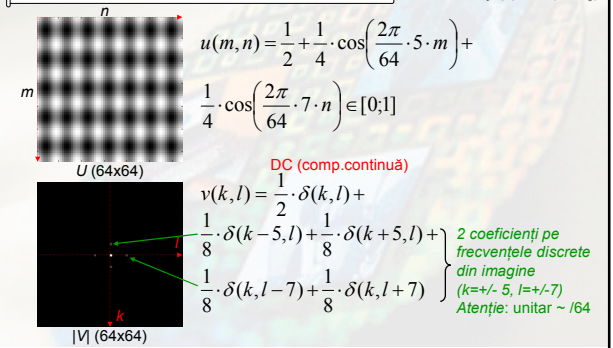
Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: orientare și frecvență (continuare)



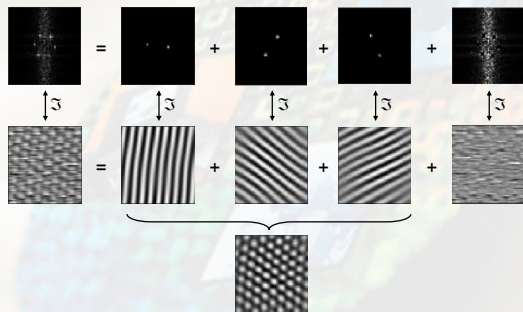
Transformata Fourier 2D discretă unitară

exemple: orientare și frecvență (continuare)



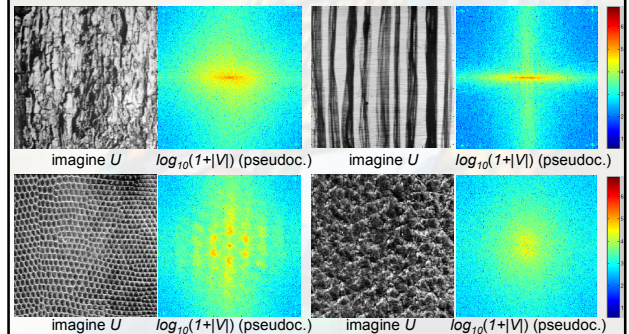
Transformata Fourier 2D discretă unitară

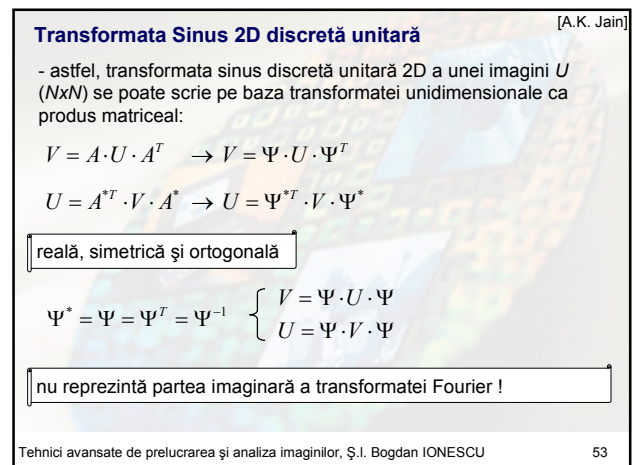
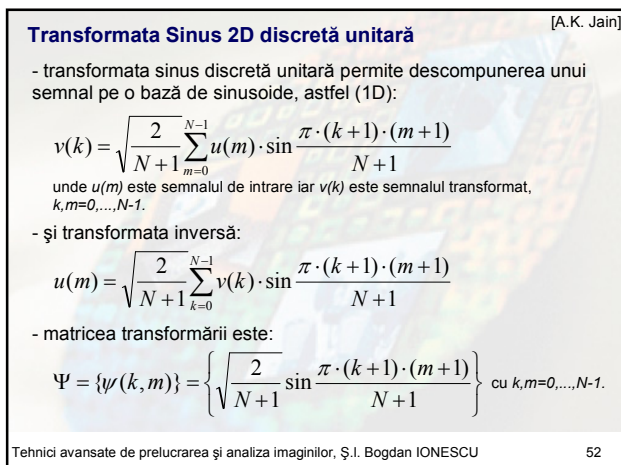
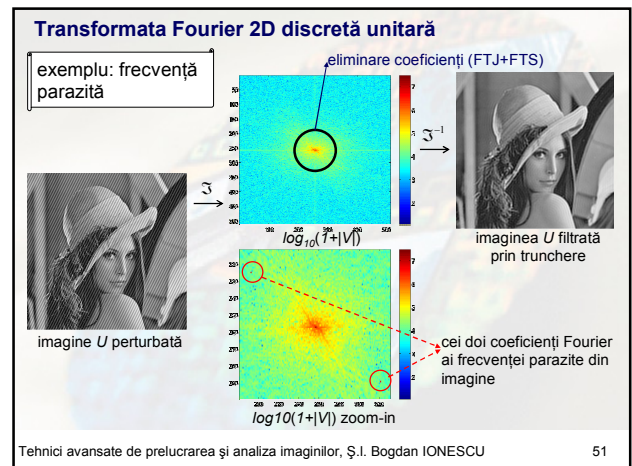
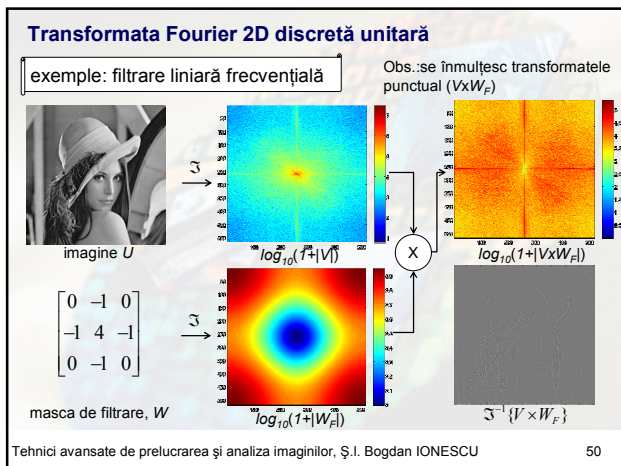
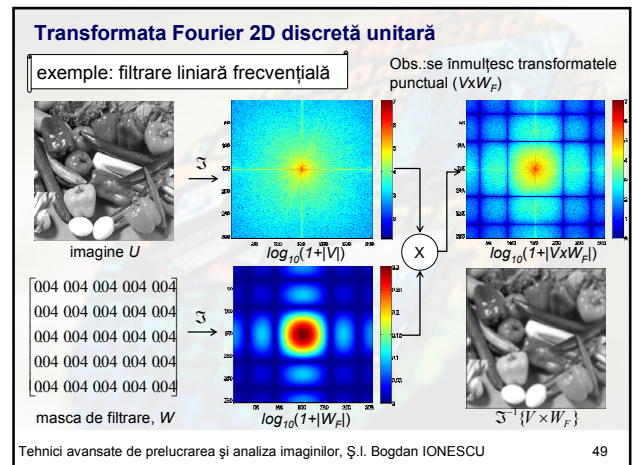
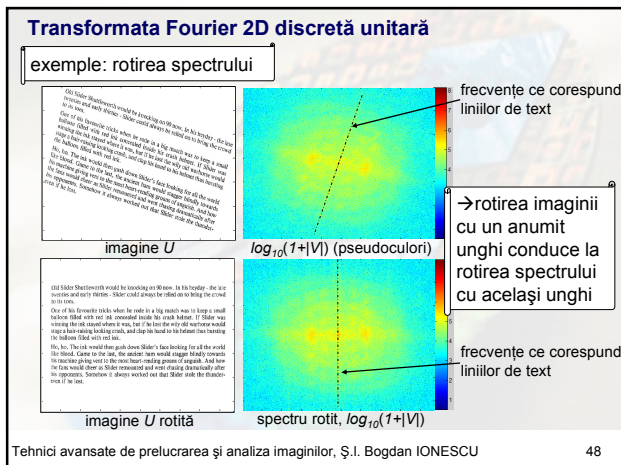
exemple: superpoziție



Transformata Fourier 2D discretă unitară

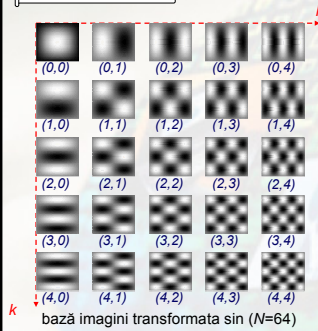
exemple: texturi naturale





Transformata Sinus 2D discretă unitară

bază de imagini



$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$A_{k,l}^* = \psi_k^* \cdot \psi_l^{*T}$$

unde ψ_k^* reprezintă coloana k a matricei Ψ^{*T} .

$$\Psi^* = \Psi = \Psi^T = \Psi^{-1}$$

$$\Rightarrow A_{k,l}^* = \psi_k^* \cdot \psi_l^T$$

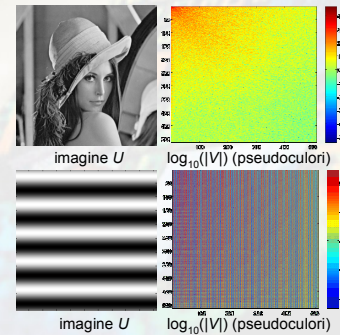
unde ψ_k^* reprezintă coloana k a matricei Ψ .

bază imagini transformata sin (N=64)

Transformata Sinus 2D discretă unitară

propune o compactare foarte bună până la excelentă a energiei.

- exemple:



Transformata Cosinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- transformata cosinus discretă unitară permite descompunerea unui semnal pe o bază de cosinusuri, astfel (1D):

$$v(k) = \alpha(k) \sum_{m=0}^{N-1} u(m) \cdot \cos \frac{\pi \cdot (2 \cdot m + 1) \cdot k}{2 \cdot N}$$

unde $u(m)$ este semnalul de intrare, $v(k)$ este semnalul transformat, $k, m = 0, \dots, N-1$ iar $\alpha(k)$ este dat de:

$$\alpha(k) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & k = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{altfel} \end{cases}$$

- și transformata inversă:

$$u(m) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(k) \cdot v(k) \cdot \cos \frac{\pi \cdot (2 \cdot m + 1) \cdot k}{2 \cdot N}$$

Transformata Cosinus 2D discretă unitară

[A.K. Jain]

- matricea transformării este:

$$C = \{c(k, m)\} = \left\{ \alpha(k) \cos \frac{\pi \cdot (2 \cdot m + 1) \cdot k}{2 \cdot N} \right\}$$

- astfel, transformata cosinus discretă unitară 2D a unei imagini U ($N \times N$) se poate scrie pe baza transformatei unidimensionale ca produs matriceal:

$$V = A \cdot U \cdot A^T \rightarrow V = C \cdot U \cdot C^T$$

$$U = A^{*T} \cdot V \cdot A^* \rightarrow U = C^{*T} \cdot V \cdot C^*$$

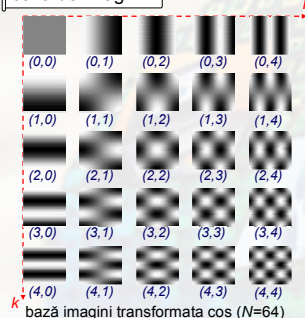
reală și ortogonală

$$C = C^*, C^{-1} = C^T \quad \begin{cases} V = C \cdot U \cdot C^T \\ U = C^T \cdot V \cdot C \end{cases}$$

Transformata Cosinus 2D discretă unitară

nu reprezintă partea reală a transformatei Fourier !

bază de imagini



$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} A_{k,l}^* \cdot V(k,l)$$

$$A_{k,l}^* = c_k^* \cdot c_l^{*T}$$

unde c_k^* reprezintă coloana k a matricei C^{*T} .

$$C = C^*, C^{-1} = C^T$$

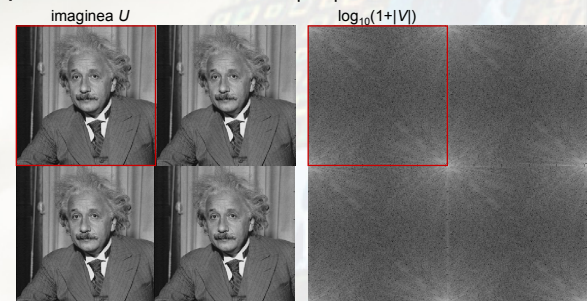
$$\Rightarrow A_{k,l}^* = c_k^* \cdot c_l^T$$

unde c_k^* reprezintă coloana k a matricei C^T .

bază imagini transformata cos (N=64)

Transformata Cosinus 2D discretă unitară

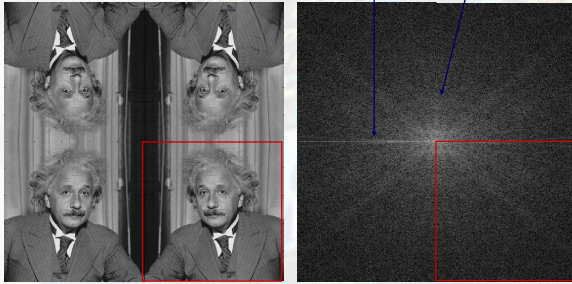
extensia periodică - (review) la transformata Fourier extensia se realizează prin periodizare:



[D.J. Fleet, A.D. Jepson]

Transformata Cosinus 2D discretă unitară

extensia periodică (continuare) - extensia spectrului transformatei cosinus discrete se face de această dată prin oglindire (reducere prezență linii orizontale și verticale = bordură)



[D.J. Fleet, A.D. Jepson]

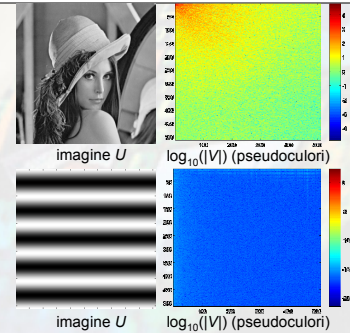
Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

59

Transformata Cosinus 2D discretă unitară

propune o compactare excelentă a energiei pentru semnale cu corelație ridicată.

- exemple:



Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

61

Sfârșit Curs

Tehnici avansate de prelucrarea și analiza imaginilor, Ș.I. Bogdan IONESCU

62